UNIVERSITÉ PARIS VIII **Fondements des mathématiques**
DEUG LIT **1996-97**

Examen partiel du 29 mai 1997

1. (4 points) Trouver deux nombres complexes de somme $-1-i$ et de produit $-3-\frac{7}{2}i$.

2. (4 points) Donner module et argument des complexes suivants :
a/ $1+i$; b/ $\sqrt{3}+i$; c/ $(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; d/ $(\sqrt{(}6)+\sqrt{2}+i((\sqrt{6}-\sqrt{2})$.
(Pour c/ et d/, on pourra calculer d'abord $\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$ et $\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)$)
En déduire cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

3. (4 points) Soit $\theta \in]0,\pi]$, et soit $s_\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & s_\theta(z) = e^{i\theta}.z+1 \end{array}$
a/ Montrer que s_θ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$;
b/ Montrer qu'il existe un et un seul z_0 de $\mathbb{C}$ tel que $s_\theta(z_0) = z_0$. Calculer son module et son argument $\left(\text{on pourra montrer que } z_0.e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{-1}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\right)$.
c/ Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $s_\theta \circ s_{-\theta}(z) - s_{-\theta} \circ s_\theta(z) = 2i\sin\theta$.

4. (2 points) Calculer $(1+i)^2$ et $(1-i)^2$; factoriser X^4+16 dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

5. (6 points) a/ Montrer que le polynôme $X^3+3X+2i$ a une racine double et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.
b/ Soit l'équation en z : $z^{3n}+3z^n+2i=0$. Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z^n & = & Z \\ Z^3+3Z+2i & = & 0 \end{array} \right.$$

À l'aide du a/, résoudre ce système (on donnera les solutions sous forme exponentielle). Combien y a-t-il de solutions **distinctes** ?

6. (4 points) a/ Trouver les racines de X^2-2X+2 ; calculer leur carré et leur puissance quatrième.
b/ Quel est le reste dans la division euclidienne de $X^{24}+8X^{18}+1$ par X^2-2X+2 ? (utiliser les racines trouvées en a/).