UNIVERSITÉ PARIS VIII **FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES**
DEUG LIT **1996-97**

Examen partiel du 12 décembre 1996

1. (5 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^4+4=0$ (donner les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle). En déduire la factorisation du polynôme X^4+4 dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

2. (5 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2-2Z+4=0$ (on donnera les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle). En déduire l'ensemble des solutions (sous forme exponentielle) de l'équation en z : $z^{2n}-2z^n+4=0$, où n est un entier positif.

3. (5 points ; a/ et b/ sont indépendants.) Soit P le polynôme $(X\sin\frac{\pi}{48}+\cos\frac{\pi}{48})^{12}$.
a/ Quel est son terme de plus haut degré ? son terme en X ? son terme constant ? (on rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$; on ne cherchera pas à calculer $\cos\frac{\pi}{48}$ ni $\sin\frac{\pi}{48}$).
b/ Calculer le reste dans la division euclidienne de P par X^2+1 (on doit trouver : $\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}$).

4. (5 points ; a/ et b/ sont indépendants.) Soit l'application $\varphi : z\mapsto iz+1$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
a/ Quel est l'unique z_0 de $\mathbb{C}$ invariant par φ (c'est-à-dire tel que $z_0=\varphi(z_0)$) ? Donner son module et son argument.
b/ Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et trouver sa bijection inverse φ^{-1}.
c/ Interprétation géométrique de φ et de φ^{-1} ?

5. (4 points) Trouver l'ensemble des points $M(x,y)$ d'affixe $z=x+iy$ du plan complexe tels que $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=\sqrt{2}$ (on rappelle que l'ensemble des points $M(x,y)$ du cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon r a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$).