**UNIVERSITÉ PARIS VIII** **FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES**
**DEUG LIT** **1997-98**

## Examen final du 6 février 1998

**1. (3 pts)** Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On définit l'application $Id$(application identité de $E$) par : $\forall x \in E$ , $Id(x) = x$. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors $f$ est injective et $g$ est surjective.

**2. (2 pts)** Soit l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = z^2 + 1$. Montrer que $\varphi$ est surjective, mais qu'elle n'est pas injective. Quel est l'ensemble des antécédents de $0$ par $\varphi$?

**3. (6 pts)** On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en $z$ :

$$(2+iz)^5 = (2-iz)^5 \qquad (1)$$

a/ Montrer que $z = -2i$ n'est pas solution de $(1)$ ; en déduire que l'équation $(1)$ est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2+iz}{2-iz} = u & (2) \\ u^5 = 1 & (3) \end{cases}$$

b/ À partir de l'équation (2), exprimer $z$ en fonction de $u$.
c/ En posant $u = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, où $\theta \neq \pi(mod.2\pi)$, déterminer module et argument de $\dfrac{1-u}{1+u}$ en fonction de $\theta$. En déduire module et argument de $z$.
d/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en $u$ : $u^5 = 1$ (3), et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(1)$.

**4. (4 pts)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tous différents de $0$, convergeant vers une limite $l > 0$.
a/ Montrer qu'il existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_0$, $u_n \geq \dfrac{l}{2}$ (indication : prendre $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ dans la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = l$)
b/ En déduire, en utilisant la définition de la limite, que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$.

**5. (5 pts** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = x_n^3 + \dfrac{1}{4}$.
a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{2}$.
b/ Exprimer $x_{n+1} - x_n$ en fonction de $x_n - x_{n-1}$. En déduire que $x_{n+1} - x_n$ et $x_n - x_{n-1}$ sont de même signe (on pourra utiliser l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
c/ Calculer $x_1 - x_0$ et en déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
d/ Que peut-on dire de la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
e/ Déduire de b/ qu'il existe un $z$ dans l'intervalle $\left[0\,,\,\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $z^3 - z - \dfrac{1}{4} = 0$. Donner un encadrement de $z$ à 0.25 près.

**6. (5pts)** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+3}4$, $u_0$ étant supposé donné.
a/ Calculer les points fixes $\alpha$ et $\beta$ de la suite, c'est-à-dire les solutions de l'équation en $x$ : $f(x) = x$, où $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+3}$.
b/ Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = \alpha$ ou si $u_0 = \beta$? Dans la suite, on suppose $u_0 \neq \alpha$ et $u_0 \neq \beta$.
c/ On pose $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$. En déduire $v_n$ en fonction de $n$ et $v_0$.
d/ Déterminer $u_n$ en fonction de $n$ et $v_0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.