Examen final (2e session) du 16 septembre 1997

1. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en X : $X^6 + 27 = 0$.
On donnera les solutions sous forme trigonométrique (exponentielle), puis sous forme algébrique, et on les représentera dans le plan complexe.

2. (4 points) Soit le polynôme $P = X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^2 - 2X - 1$. Calculer $P(1)$ et $P(-1)$.
Montrer que P admet également $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour racine. Avec quel ordre de multiplicité ?
En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

3. (4 points) a/ Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \overline{D}^*(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < |z| \leq 1\} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{i(x+iy)} \end{array}$
est une bijection (indication : déterminer module et argument de $f(x,y)$; que peut-on dire du module et de l'argument d'un complexe de $\overline{D}^*(0,1)$?).

4. (8 points) Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

a/ Montrer que $\forall n$, $u_n \geq 2$.

b/ Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est ni croissante ni décroissante (on pourra vérifier que les signes de $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont opposés).

c/ Montrer que la seule limite possible pour $(u_n)_{n\geq 0}$ est (si elle existe) $l = 1 + \sqrt{2}$.

d/ En écrivant que :

$$\left|u_n - (1+\sqrt{2})\right| = \left|\frac{1}{u_{n-1}} + 2 - 1 - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(1-\sqrt{2})\left[u_{n-1} - (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})\right] + 1}{u_{n-1}}\right| = \ldots$$

(continuer ce calcul), montrer que $\left|u_n - (1+\sqrt{2})\right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_{n-1} - (1+\sqrt{2})\right|$, et en déduire que $\forall n \geq 0 : \left|u_n - (1+\sqrt{2})\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \left|u_0 - (1+\sqrt{2})\right|$.

e/ Quelle est la nature de la suite $\left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\right]_{n\geq 0}$? Quelle est sa limite ?
(on pourra vérifier que $0 < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{1}{4}$)
En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ a bien pour limite $l = 1 + \sqrt{2}$.

f/ Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, et montrer à l'aide du d/ que u_6 est une valeur approchée de $1 + \sqrt{2}$ à 10^{-3} près. Trouver de même N tel que u_N soit une valeur approchée de $1 + \sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

(N.B. : on pourra si nécessaire utiliser, même sans les avoir démontrés, les résultats d'une question dans les questions suivantes.)