Examen final du 30 juin 1997

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ en posant $Z = \dfrac{z+1}{z-i}$ l'équation en z : $(z+1)^n + 2(z-i)^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. a/ Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-i} \end{array}$

est une bijection. L'application $f^n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & [f(z)]^n \end{array}$

peut-elle être une bijection si n est un entier naturel différent de 1 ? (utiliser l'exercice **1.**)

b/ Déterminer et représenter graphiquement dans le plan complexe l'ensemble des $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $f(z)$ soit réel.

c/ Déterminer et représenter graphiquement dans le plan complexe l'ensemble des $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

3. Soit le polynôme $P = (X+1)^6 + (X-1)^6 - 2X^2 - 2$.
a/ Montrer que 0 est racine de P. Avec quelle multiplicité ?

b/ Calculer $(1+i)^2$ et $(1-i)^2$; en déduire $(1+i)^6$ et $(1-i)^6$. Quelle est la valeur de $P(i)$? En remarquant que P est à coefficients réels, que peut-on en déduire pour $P(-i)$?

c/ Développer P. Pourquoi savait-on déjà, d'après a/ et b/, que P est divisible par $X^2(X^2+1)$? Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{-3u_n - 2}{u_n - 6}$.
a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

b/ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c/ On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Calculer u_n en fonction de v_n, en déduire u_n en fonction de n et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.