UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**
TES **1998-99**

Examen partiel du 13 avril 1999

1. (6 points) Calculer le carré du nombre complexe $\alpha = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; en déduire module et argument de α, à partir de ceux de son carré. Donner module et argument de $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ et de $\dfrac{\alpha}{\beta}$.
Donner la forme algébrique de $\dfrac{\alpha}{\beta}$ et en déduire que :
$\cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{6+3\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$, et que : $\sin\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{-\sqrt{6-3\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$.

2. (6 points) On rappelle que les seules racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation en Z : $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont les nombres complexes $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$.

Montrer que l'équation en z : $z^8 + z^4 + 1 = 0$ (1)
est équivalente à : $\begin{cases} Z^2 + Z + 1 &= 0 \\ z^4 &= Z \end{cases}$

Résoudre les équations en z : $z^4 = j$ et $z^4 = j^2$ dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique, et en déduire les 8 solutions de l'équation (1), sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. Représenter ces 8 nombres sur le cercle unité du plan complexe.

3. (3 points) Après avoir montré qu'elle est inversible, inverser (par exemple par des combinaisons linéaires de lignes d'un système linéaire) la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(Indication : on pourra commencer par retrancher, dans le système en x, y, z, t considéré, la 1e ligne de toutes les autres.)

4. (9 points) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$, on donne l'endomorphisme φ défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = -2\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = 3\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Calculer valeurs propres et vecteurs propres de A. (Indications : pour calculer det $(A - \lambda I)$, ajouter la 2e ligne à la 3e, puis retrancher la 3e colonne de la 2e, avant de développer le déterminant ; pour le calcul des sous-espaces propres : résoudre les systèmes obtenus, par exemple par rapport à x et y en fonction du paramètre z.)

Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donner la matrice de passage P de la base canonique à la base propre choisie et son inverse P^{-1}, et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'examen partiel (MPE) du 13 avril 1999

1. $\alpha^2 = \dfrac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{4} - \dfrac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$; donc, si $\alpha = re^{i\theta}$, $r^2e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, soit : $r = 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{8}$ ou $\dfrac{\pi}{8} + \pi$; mais α ayant sa partie réelle et sa partie imaginaire toutes deux positives, $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, i.e. $\alpha = e^{i\frac{\pi}{8}}$. D'autre part, $\beta = e^{i\frac{\pi}{6}}$, d'où $\dfrac{\alpha}{\beta} = e^{i\frac{\pi}{8}-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{24}} = \cos\dfrac{\pi}{24} - i\sin\dfrac{\pi}{24}$. Mais l'expression algébrique de $\dfrac{\alpha}{\beta}$ s'écrit :

$$\alpha\frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} + i\frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

On en en déduit bien que :

$\cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$, et que : $\sin\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{-\sqrt{6-3\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$.

2. En posant $Z = z^4$, l'équation (1) devient en effet $Z^2 + Z + 1 = 0$, soit $Z = j$ ou $Z = j^2$; d'où $z^4 = j$ ou $z^4 = j^2$. L'équation $z^4 = j$ s'écrit, avec $z = re^{i\theta}$: $r^4e^{4i\theta} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, soit $r = 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} (k = 0, 1, 2, 3)$, d'où les 4 solutions : $z = e^{i\frac{\pi}{6}}, z = e^{i\frac{2\pi}{3}} (= j), z = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, z = e^{-i\frac{\pi}{3}} (= -j)$. Et de même, l'équation $z^4 = j^2$ s'écrit, avec $z = re^{i\theta}$: $r^4e^{4i\theta} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$, soit $r = 1$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} (k = 0, 1, 23)$, d'où les 4 solutions : $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}, z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (= j^2), z = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z = e^{i\frac{\pi}{3}} (= -j^2)$.

Il y a ainsi 8 solutions à l'équation (1) : $e^{i\frac{\pm\pi}{6}}, e^{i\frac{\pm\pi}{3}}, e^{i\frac{\pm 2\pi}{3}}, e^{i\frac{\pm 5\pi}{6}}$, qui ont pour expression algébrique : $\pm\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{i}{2}$.

Une représentation graphique les fait apparaître aux emplacements des heures sur le cadran d'une horloge, sauf aux heures 3, 6, 9 et 12. Ce sont en effet les racines 12[es] de l'unité qui ne sont pas racines 4[es] (qui sont $1, -i, -1$ et i, à 3, 6, 9 et 12 heures), puisque $z^{12} - 1 = (z^8 + z^4 + 1)(z^4 - 1)$.

4. En retranchant dans le déterminant de A la 1[e] ligne de toutes les autres, on obtient :

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \neq 0$, donc A est inversible. L'inversion de la matrice A conduit de même, à partir du (multi-)système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & + & \frac{5}{2}y & + & z & + & t & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & + & y & + & \frac{5}{2}z & + & t & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & + & y & + & z & + & \frac{5}{2}t & = & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{3}{2}y & & & & & = & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3}{2}z & & & = & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & \frac{3}{2}t & = & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\text{soit :} \begin{array}{rcl} x & = \\ y & = \\ z & = \\ t & = \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ -2?3 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Il y a donc 3 valeurs propres réelles distinctes : $-2, 2$, et 4. A est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Équations de $Ker(A+2I)$:

$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$, soit : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 6y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & - & 4y & = & 0 \end{array} \right.$, c'est-à-dire : $x = y = -z$, et

$Ker(A+2I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Équations de $Ker(A-2I)$:

$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$, soit : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$, c'est-à-dire : $x = -y = z$, et

$Ker(A-2I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Équations de $Ker(A-4I)$:

$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ -4x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$, soit : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & 2y & = & 0 \\ 6x & - & 6z & = & 0 \end{array} \right.$, c'est-à-dire : $x = y = z$, et

$Ker(A-4I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

D'où $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcul de P^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \quad 0 \quad 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \quad 1 \quad 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \right., \text{ soit : } \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \quad 0 \quad 0 \\ x & - & 2y & & & = & -1 \quad 1 \quad 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \quad 0 \quad 1 \end{array} \right., \text{ soit :}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \quad 0 \quad 0 \\ & & y & & & = & \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \\ & & & & z & = & 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \right., \text{ soit encore : } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \\ y & = & \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \\ z & = & 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \right., \text{ et}$$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (vérification : $PP^{-1} = I$).

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ d'où } A'^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \text{ et } e^{tA'} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^n+(-2)^n}{2} & \frac{4^n-2^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} \\ \frac{(-2)^n-2^n}{2} & \frac{4^n+2^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} \\ \frac{2^n-(-2)^n}{2} & \frac{4^n-2^n}{2} & \frac{4^n+(-2)^n}{2} \end{bmatrix},$$

et, de même, que :

$$e^{tA} = Pe^{tA'}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{-2t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}.$$