UNIVERSITÉ PARIS VIII **TES**

Mathématiques pour la licence de sciences économiques **1997-98**

<u>Examen partiel du 24 avril 1998</u>

1. (8 points) a/ Résoudre algébriquement (= sous forme $x+iy$) dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1+i$.
b/ Déterminer module et argument de $1+i$, puis des deux racines de l'équation $z^2 = 1+i$. En déduire la valeur (avec des racines carrées) de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
c/ En remarquant que $(1+i)^2 = (-1-i)^2 = 2i$, en déduire les 4 racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 2i$, sous forme algébrique et sous forme exponentielle, et les représenter sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[4]{2}$.

2. (8 points) $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = -5\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}, \varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \varphi(\overrightarrow{e_3}) = 2\overrightarrow{e_3}$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Trouver valeurs propres et vecteurs propres de A, diagonaliser A, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (8 points) Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ étant muni de la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, définie par $\psi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}, \psi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \psi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Donner la matrice B de ψ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que B est diagonalisable ? À quoi voit-on immédiatement que 2 est valeur propre ? Déterminer toutes les valeurs propres de B (on trouvera $1,\ -1,$ et 2). Montrer que les vecteurs propres de B correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux ; en déduire une base orthonormée formée de vecteurs propres. Diagonaliser ψ dans la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\overrightarrow{u}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\right\}$$

Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tB$ pour $t \in \mathbb{R}$. N.B. : on rappelle que la matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n. est orthogonale et que l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée.