Examen partiel du 31 mai 2001

1. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (7+2i)z + 15 + 9i = 0$ (noter que $289 = 17^2$).

2. (6 points) On donne $u = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Calculer u^2. Donner module et argument de u^2 et en déduire module et argument de u.

Soit $v = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Calculer $\dfrac{v}{u}$ sous forme trigonométrique (exponentielle), puis sous forme algébrique. En déduire les valeurs, exprimées à l'aide de racines carrées, de $\cos\dfrac{\pi}{24}$ et $\sin\dfrac{\pi}{24}$.

3. (8 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ par :
$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -4\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 8\overrightarrow{e_3}$. Quelle est la matrice A de φ dans la base canonique ? Pourquoi peut-on affirmer immédiatement que 2 est valeur propre ? Calculer toutes les valeurs propres de A et dire (sans plus de calculs) pourquoi A est nécessairement diagonalisable. Calculer les sous-espaces propres associés et donner la matrice P de passage de la base canonique à une base propre que l'on choisira. Calculer P^{-1}. Enfin, calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

4. (6 points) Soit le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - y_n - 1 \\ y_{n+1} &= -x_n + 3y_n - 4 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un point fixe (=une solution particulière constante) unique que l'on déterminera. Donner la solution générale du système homogène associé et en déduire la solution générale du système complet. Donner la solution du système complet qui satisfait aux conditions initiales $x_0 = 3$ et $y_0 = 7$.