Examen partiel du 11 mai 2000

1. (6 points) Donner module et argument des nombres complexes : $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; en déduire module et argument de uv et u/v, et enfin la valeur (exprimée à l'aide de racines carrées) de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ d'une part, de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ d'autre part.

2. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré en z : $z^2 - (1+i)z - 4i = 0$.

3. (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, on donne l'endomorphisme φ défini par : $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer que -1 est valeur propre de A ? Pour quel vecteur propre ? Calculer les autres valeurs propres et vecteurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donner la matrice de passage P de la base canonique à la base propre choisie et son inverse P^{-1}. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$.

4. (6 points) Soit la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$Q(X) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 3y^2 + 2yz + 3z^2$$

Donner la matrice A de la forme quadratique Q, i.e. la matrice A telle que $Q(x,y,z) = {}^tXAX$. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Montrer que 5 est valeur propre de A ; pour quel vecteur propre ? Calculer $Tr\,A$ et $det\,A$; en déduire la somme et le produit des autres valeurs propres, puis ces autres valeurs propres elles-mêmes et les vecteurs propres correspondants. En déduire que Q est définie positive. Donner une base orthonormée de vecteurs propres pour A, la matrice de passage P de la base canonique à la base propre choisie et sa matrice inverse.