Examen final (2e session) du 20 septembre 1999

1. (4 points) Calculer module et argument des nombres complexes $u = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $v = \sqrt{3} + i$. Donner le quotient $\frac{u}{v}$ sous forme trigonométrique (=exponentielle) et sous forme algébrique (=cartésienne). En déduire l'expression de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ à l'aide de radicaux (=de racines carrées).

2. (6 points) $\mathbb{R}^3$ étant muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, exprimer la forme quadratique $q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy - 2xz + 3y^2 - 2yz + 5z^2$ sous forme matricielle, en posant : $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Calculer les valeurs propres de Q et en déduire que $q >> 0$.

Diagonaliser la matrice Q dans une base orthonormée de vecteurs propres, i.e. écrire $Q = P\Delta {}^tP$, où Δ est diagonale et P orthogonale (i.e. ${}^tP = P^{-1}$, ce qui revient à dire que les vecteurs-colonnes de P sont orthogonaux et de norme 1). En posant $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = U = {}^tPX$, montrer que :
$q(x, y, z) = {}^tU\Delta U = 3u^2 + 2v^2 + 6w^2 = (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x + y - 2z)^2$.

(N.B.: On rappelle que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ et que ${}^t({}^tA) = A$.)

3. (9 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 5\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$.

a/ Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

b/ Donner la solution générale du système dynamique à temps discret :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 5x_n - \frac{1}{2}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & -2x_n + 5y_n + 2 \end{array} \right.$$

et la solution satisfaisant aux conditions initiales : $x_0 = 1, y_0 = 2$.

Ce système admet-il un équilibre ? Si oui, cet équilibre est-il stable ou instable, et pourquoi ?

c/ On considère le système dynamique à temps continu :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

où A est la matrice définie dans le a/. Ce système admet-il un équilibre ? Si oui, cet équilibre est-il stable ? (on notera que les valeurs propres du système sont les opposées des valeurs propres de A). Résoudre complètement ce système avec les conditions initiales $x_0 = 1, y_0 = 2$.

4. (5 points) Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$: $x'' + 3x' + 2x = 2t^2 - 2t + 10$, avec les conditions initiales : $x(0) = -1, x'(0) = 0$.