UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**
TES **1998-99**

Examen final du 22 juin 1999

1. (2 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (4-i)z + 5 - 5i = 0$.

2. (6 points) $\mathbb{R}^3$ étant muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable ? Calculer valeurs propres et vecteurs propres de A, et exprimer A sous la forme $A = P\Delta {}^tP$, où Δ est diagonale et P orthogonale. En déduire le calcul de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et de $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (4 points) Soit l'équation différentielle en y : $y'' - 6y' + 5y = 4(4t-1)e^t$ (1)
a/ Quelle est la solution générale de l'équation homogène associée ?
b/ Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $y = t(at+b)e^t$.
c/ En déduire la solution générale de (1), puis l'unique solution de (1) qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

4. (6 points) On donne le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{5}{2}x_n - 6y_n + 3 \\ y_{n+1} &= x_n - \dfrac{5}{2}y_n + 1 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système. Donner la solution qui est déterminée par les conditions initiales $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

5. (8 points) On donne le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + 3t^2 - t + 2 + te^{-t} \\ y' &= x - 2y - 3t^2 + t - 2 + te^{-t} \end{cases} \quad (1)$$

a/ Montrer que le système homogène associé admet l'origine $(0,0)$ comme point d'équilibre stable.
b/ Diagonaliser la matrice $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ en vérifiant que $\{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\}$ est une base de vecteurs propres pour A. Soient X et Y les coordonnées dans cette base du vecteur de coordonnées x et y dans la base canonique ; exprimer X et Y en fonction de x et y, et inversement. En déduire que le système (1) en x et y est équivalent au système (2) en X et Y :

$$\begin{cases} X' &= -X + te^{-t} \\ Y' &= -3Y + 3t^2 - t + 2 \end{cases} \quad (2)$$

c/ Donner la solution générale de ce système, en donnant d'abord la solution générale du système homogène associé, puis en recherchant une solution particulière de la forme $X_1 = t(at+b)e^{-t}$, $Y_1 = at^2 + bt + c$. En déduire la solution générale du système (1). Montrer l'existence d'une trajectoire stable pour ce système.
d/ Déterminer la solution du système (1) qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.