UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**
TES **1997-98**

Examen final (2[e] session) du 21 septembre 1998

1. (4 points) a/ Calculer module et argument des nombres complexes $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$; b/ résoudre dans $\mathbb{C}$ les 2 équations : $z^2 = \sqrt{3}+i$ et $z^2 = \sqrt{3}-i$, d'abord sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique ; c/ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$; d/ déduire de b/ et c/ les solutions, sous forme algébrique et sous forme exponentielle, de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$.

2. (4 points) $\mathbb{R}^2$ étant muni de la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, on donne l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 4\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (5 points) Soit l'équation différentielle en y : $y'' - 4y' + 4y = (2t-1)e^{2t}$ (1)
a/ Quelle est la solution générale de l'équation homogène associée ?
b/ Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $y = t^2(at+b)e^{2t}$.
c/ En déduire la solution générale de (1), puis l'unique solution de (1) qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

4. (5 points) On donne le système dynamique à temps discret (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \alpha u_n - v_n + 1 \\ v_{n+1} & = & \alpha^2 u_n + v_n + 2 \end{array}\right.$$

a/ On suppose $\alpha = 0$. Déterminer u_n et v_n en fonction de n et v_0. Le système admet-il un équilibre ?
b/ On suppose dans toute la suite $\alpha \neq 0$. Montrer que le système admet alors toujours un équilibre (u, v) que l'on déterminera en fonction de α.
c/ On suppose $\alpha = 1$. L'équilibre est-il stable ou instable ?
d/ On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. L'équilibre est-il stable ou instable ?
(N.B. : dans c/ et d/ on ne demande pas de calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.)

5. (8 points) On donne le système dynamique à temps continu :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -5x + 6y + t \\ y' & = & -x + te^{-t} \end{array}\right. \quad (1)$$

a/ Montrer que le système homogène associé admet l'origine $(0,0)$ comme point d'équilibre stable.
b/ Diagonaliser la matrice $\begin{bmatrix}-5 & 6\\-1 & 0\end{bmatrix}$ en vérifiant que $\{\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\}$ en est une base de vecteurs propres. Soient X et Y les coordonnées dans cette base du vecteur de coordonnées x et y dans la base canonique ; exprimer X et Y en fonction de x et y, et inversement.
c/ En déduire que le système (1) en x et y est équivalent au système en X et Y :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & -3X + t - 2te^{-t} \\ Y' & = & -2Y - t + 3te^{-t} \end{array}\right. \quad (2)$$

Résoudre ce système en vérifiant qu'il admet la solution particulière :
$X = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t - (t - \frac{1}{2})e^{-t}, Y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + 3(t-1)e^{-t}$, et en déduire la solution générale du système (1).
d/ Déterminer l'unique solution du système (1) qui passe en $t = 0$ par $x_0 = -\frac{7}{3}, y_0 = -\frac{13}{36}$.