

Examen final (2^e session) du 16 septembre 1997

- 1. (4 points)** a/ Donner module et argument des nombres complexes $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.
 b/ Résoudre dans \mathbb{C} les deux équations : $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ d'abord sous forme trigonométrique (exponentielle), puis sous forme algébrique.
 c/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
 d/ Dédire de b/ et c/ la résolution de l'équation dans \mathbb{C} : $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

- 2. (6 points)** Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini dans la base canonique $\left\{ \vec{e}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ par :
 $f(\vec{e}_1) = \frac{5}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{6}\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{5}{3}\vec{e}_2$. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique ?
 Donner valeurs propres et vecteurs propres de f ; calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$, et $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

- 3. (8 points)** On considère l'équation de récurrence : $u_n = \alpha u_{n-1} - 4u_{n-2} + 1$ (1) avec les conditions initiales : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

a/ Montrer que 1 est racine du polynôme caractéristique (ou encore : valeur propre de la matrice du système de dimension 2 associé) si et seulement si $\alpha = 5$, ce qu'on suppose dans la suite du a/. Quelle est alors l'autre racine du polynôme caractéristique ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée. Montrer que l'équation complète (1) n'a pas de point d'équilibre, mais admet une solution particulière de la forme $w_n = kn$. En déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

b/ On suppose $\alpha = -5$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Quelles sont les deux racines du polynôme caractéristique ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée ; en déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

c/ On suppose $\alpha = 4$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Montrer que le polynôme caractéristique admet 2 pour racine double. On rappelle qu'alors la solution générale de l'équation homogène associée est $u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$. En déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

d/ On suppose $\alpha = 0$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Montrer que le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées. Donner la solution générale de l'équation homogène associée ; en déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

e/ Montrer que, dans aucun des quatre cas envisagés, le système dynamique (1) n'admet d'équilibre stable. Pourquoi peut-on affirmer que ce système n'en admet jamais, quelle que soit la valeur de α ? (indication : le produit des valeurs propres, racines du polynôme caractéristique, est égal à 4).

- 4. (6 points)** On considère le système différentiel :
$$\begin{cases} x' &= -5x + 6y + 1 \\ y' &= -x + 2 \end{cases}$$

Montrer que ce système a un équilibre unique. Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de la matrice du système. L'équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée, d'abord dans la base propre, puis dans la base canonique (faire le changement de coordonnées $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, si P est la matrice de passage de la base canonique à la base propre).

En déduire la solution générale du système, puis celle qui en $t = 0$ passe par $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}$.