UNIVERSITÉ PARIS VIII
TES

Mathématiques pour la licence de sciences économiques
1996-97

Examen final du 26 juin 1997

1. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
a/ $X^2+2X+2=0$; b/ $X^2=-1+i$; c/ $X^2=-1-i$; d/ $X^4+2X^2+2=0$.

2. (6 points) $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.
a/ On donne : $\overrightarrow{u_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{u_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{e_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Soit P la matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ à la base canonique (qui permet donc d'exprimer $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ en fonction de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, et non le contraire...). Donner l'expression de P^{-1} et de P.
b/ On donne $\overrightarrow{v_1}=-3\overrightarrow{u_1}+2\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{u_1}-4\overrightarrow{u_2}$, et on définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ par : $f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{v_1}$ et $f(\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{v_2}$. Donner l'expression de la matrice A de f dans la base $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ et en déduire, à l'aide de P^{-1} et P, l'expression de la matrice A' de f dans la base canonique.
c/ Montrer que la base canonique est propre pour f. Donner l'expression dans la base canonique, pour $n\in\mathbb{N}$, de $f^n(\overrightarrow{e_1})$ et de $f^n(\overrightarrow{e_2})$, puis, pour $t\in\mathbb{R}$, de $e^{tf}(\overrightarrow{e_1})$ et de $e^{tf}(\overrightarrow{e_2})$.

3. (6 points) Soit le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -2x_n+y_n+1 \\ y_{n+1} &= 2x_n-3y_n \end{cases}$$

Montrer que $\left(x^\star=\frac{2}{5}, y^\star=\frac{1}{5}\right)$ est un équilibre pour ce système. Donner la solution générale du système homogène associé. En déduire x_n et y_n en fonction de n, si l'on suppose que $x_0=1$ et $y_0=0$. L'équilibre $\left(x^\star=\frac{2}{5}, y^\star=\frac{1}{5}\right)$ est-il stable ou instable ?

4. (8 points) a/ Soit le système différentiel (1):

$$\begin{cases} x' &= -3x+y+1 \\ y' &= 2x-4y \end{cases}$$

Montrer que $\left(x^\star=\frac{2}{5}, y^\star=\frac{1}{5}\right)$ est un équilibre pour ce système. Donner la solution générale du système homogène associé. En déduire la solution générale du système (1). L'équilibre $\left(x^\star=\frac{2}{5}, y^\star=\frac{1}{5}\right)$ est-il stable ou instable ?
b/ Soit le système différentiel (2):

$$\begin{cases} x' &= -3x+y+1 \\ y' &= 2x-4y+e^{-t} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $(x_1=a+be^{-t}, y_1=c+de^{-t})$. En déduire la solution générale de (2). Que se passe-t-il lorsque $t\to+\infty$?
c/ Comparer la solution générale de (1) et la solution générale de (2). Donner la solution de (2) qui passe par $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ en $t=0$. Même question pour le système (1).