UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**

TES **2000-2001**

<u>Examen final du 28 juin 2001</u>

1. (2 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (5+7i)z - 4 + 19i = 0$.

2. (2 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$, d'abord trigonométriquement, puis algébriquement, l'équation $z^4 + 4 = 0$.

3. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par ses valeurs sur la base canonique : $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 4\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$. Donner la matrice de φ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? que 4 est valeur propre de A ? Diagonaliser A dans une base orthonormée de vecteurs propres, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$.

4. (6 points) Soit le système dynamique à temps discret :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 5x_n - 3y_n + 12.2^n \\ y_{n+1} & = & -3x_n + 5y_n + 5.3^n \end{array} \right.$$

Donner la solution générale du système homogène associé. On peut montrer (mais il n'est pas demandé de faire cette démonstration) que le système complet admet une solution particulière de la forme : $w_n = (an+b)2^n + c3^n,\ t_n = (an-b)2^n + d3^n$. Déterminer effectivement une telle solution particulière (i.e. trouver a, b, c, d répondant à la question ; on vérifiera que la réponse est $a = 3, b = -1, c = 3, d = 2$). En déduire la solution générale du système complet, puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x_0 = 3, y_0 = 6$.

5. (4 points) Soit l'équation différentielle en y : $y'' - 4y' + 3y = (2t^2 - t + 1)e^{-t}$. Donner la solution générale de l'équation homogène associée. Montrer que l'équation complète admet une solution particulière de la forme $(at^2 + bt + c)e^{-t}$ (i.e. déterminer a, b et c répondant à la question). En déduire la solution générale de l'équation complète, puis la solution satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{4}$.

6. (6 points) Soit le système dynamique à temps continu :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -2x + 3y + 2e^{-\frac{t}{2}} \\ y' & = & -\dfrac{1}{4}x \qquad + e^{-\frac{t}{2}} \end{array} \right.$$

Donner la solution générale du système homogène associé. Montrer que le système complet admet une solution particulière de la forme : $ate^{-\frac{t}{2}}, bte^{-\frac{t}{2}}$ (i.e. déterminer a et b répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet, puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = 4, y(0) = 4$. Que peut-on dire de la stabilité des trajectoires solutions ? Ces trajectoires ont-elles une limite (= un point) lorsque $t \longrightarrow +\infty$?