UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**
TES **1999-2000**

Examen final (2[e] session) du 19 septembre 2000

1. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 + i$ sous forme trigonométrique (exponentielle) et sous forme algébrique. En déduire l'expression à l'aide de racines carrées de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

2. (6 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ par :
$f(\overrightarrow{e_1}) = \frac{5}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{6}\overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{5}{3}\overrightarrow{e_2}$. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique ? Donner valeurs propres et vecteurs propres de f ; calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (6 points) Soit le système dynamique à temps discret :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -3x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & 2x_n - 4y_n \end{array}\right.$$

Montrer que ce système admet un point d'équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système homogène associé ; en déduire la solution du système complet satisfaisant à $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

4. (8 points) a/ Soit le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -3x + y + 1 \\ y' & = & 2x - 4y \end{array}\right. \qquad (1)$$

Montrer que ce système admet un point d'équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système homogène associé. En déduire la solution générale du système complet (1).

b/ Soit le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -3x + y + 1 \\ y' & = & 2x - 4y + e^{-t} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $(x_1 = a + be^{-t}, y_1 = c + de^{-t})$. En déduire la solution générale du système (2). Que se passe-t-il lorsque $t \to +\infty$?

c/ Comparer la solution générale de (1) et la solution générale de (2). Donner la solution de (2) qui passe par $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ en $t = 0$. Même question pour le système (1).