## Examen final du 27 juin 2000

**1. (2 points)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$

**2. (6 points)** $\mathbb{R}^3$ étant muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 5\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$. Donner la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que $A$ est diagonalisable ? Que 2 est valeur propre ? Calculer la trace de $A$ et son déterminant et en déduire les autres valeurs propres. Déterminer les vecteurs propres de $A$, et exprimer $A$ sous la forme $A = P\Delta {}^tP$, où $\Delta$ est diagonale et $P$ orthogonale. En déduire le calcul de $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et de $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

**3. (6 points)** Soit l'équation différentielle en $y$ : $y'' - 2y' + y = 4(6t^2 + 3t + 1)e^t$
a/ Quelle est la solution générale de l'équation homogène associée ?
b/ Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $y = t^2(at^2 + bt + c)e^t$.
c/ En déduire la solution générale de l'équation complète, puis l'unique solution de cette équation qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 2, y'(0) = 4$.

**4. (6 points)** On donne le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n + 10 \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + 4y_n + 1 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système. Donner la solution qui est déterminée par les conditions initiales $x_0 = 4$, $y_0 = 2$.

**5. (6 points)** On donne le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 1 \\ y' = -2x \quad + 2 \end{cases}$$

a/ Montrer que ce système admet un unique point d'équilibre que l'on déterminera.
b/ Donner les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Que peut-on en déduire pour la stabilité du point d'équilibre trouvé en a/ ?
c/ Pour abréger les calculs en complexes, on donne : $\exp\left(t \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$ ; donner la solution générale du système complet.
d/ Déterminer la solution du système complet qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 4$.