UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques **1998-99**

Examen partiel du 11 mai 1999

1. (8 points) Soit $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $(x,y) \mapsto f(x,y) = xy(1-x-y)$.

Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur le carré $[0,1]^2$. On se propose de déterminer dans la suite ces bornes, maximum et minimum, et les points du carré où elles sont atteintes.

Calculer f en tout point du bord du carré $[0,1]^2$ et en déduire les bornes de f *sur le bord du carré*.

Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point (x,y). Montrer que le gradient de f s'annule en 4 points, mais que parmi ces points, un seul est strictement à l'intérieur du carré, et que c'est un maximum local pour f (remarque : il n'y a donc pas de minimum local à l'intérieur strict, i.e. bord non compris, du carré, et le minimum de f sur le carré tout entier n'est donc atteint qu'au bord).

En déduire les bornes de f sur le carré tout entier et les points du carré où elles sont atteintes.

2. (4 points) Déterminer les sommets de la conique plane de centre $O(0,0)$ d'équation $Q(X,Y) = X^2 - XY + Y^2 = 3$ en calculant les extrema de la fonction carré de la norme euclidienne sous la contrainte $Q(X,Y) - 3 = 0$.

Montrer que cette conique est une ellipse, et donner également les longueurs de ses axes.

3. (8 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, espace vectoriel euclidien, définie par :
$\overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto f(\overrightarrow{U}) = \begin{bmatrix} e^{-a}(x\cos b - y\sin b - 1) \\ e^{-a}(x\sin b + y\cos b - 1) \end{bmatrix}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donner par sa matrice jacobienne la différentielle $d_{\overrightarrow{U}}f$ de f en $\overrightarrow{U} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et vérifier qu'elle est indépendante du choix de $\overrightarrow{U}$. Calculer $\left|\left|d_{\overrightarrow{U}}f(\overrightarrow{H})\right|\right|$, pour $\overrightarrow{H} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ et en déduire la norme $\left|\left|d_{\overrightarrow{U}}f\right|\right|$ de l'application linéaire $d_{\overrightarrow{U}}f$.

Montrer que $\forall \overrightarrow{U}, \forall \overrightarrow{V}$, $\left|\left|f(\overrightarrow{U}) - f(\overrightarrow{V})\right|\right| = \left|\left|d_{\overrightarrow{U}}f\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}\right|\right|$ et en déduire que f est contractante.

(On rappelle que f est contractante ssi $\exists k, 0 < k < 1, \forall \overrightarrow{x}, \forall \overrightarrow{y}, ||f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y})|| \leq k\,||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||$).

On donne la suite $(\overrightarrow{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $\overrightarrow{X_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{X_{n+1}} = f(\overrightarrow{X_n})$. Montrer, à l'aide du théorème du point fixe (cf. feuille n°2, ex. 8.) que la suite $(\overrightarrow{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. (4 points) Un menuisier doit réaliser un caisson parallélépipédique rectangulaire de volume V maximum en utilisant une superficie totale de bois S donnée, sans autre limitation sur les dimensions.

Quelles doivent être les proportions du caisson ? (autrement dit, si on note x, y, et z les mesures des 3 arêtes du caisson : largeur, hauteur, profondeur, quels doivent être les rapports entre x, y, et z ?)

5. (4 points) Montrer que l'équation $e^x + e^y + x^2 + y^2 - 2 = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ une fonction implicite $y = \varphi(x)$ dont on donnera un développement limité à l'ordre 2 en 0. La même équation permet-elle également de définir au voisinage de $(0,0)$ une fonction $x = \psi(y)$?