UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence LIT **1997-98**

Examen partiel du 27 avril 1998

1. (8 points)
a/ (Question préliminaire) Montrer qu'un singleton (= un ensemble à un seul élément) $\{\overrightarrow{y_0}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^p$. En déduire que si f est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, l'image réciproque de $\{\overrightarrow{y_0}\}$ par f, soit $f^{-1}(\{\overrightarrow{y_0}\}) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n / f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y_0}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

b/ Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire admettant pour matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On note X le vecteur-colonne des coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ et on s'autorise dans la suite à identifier $\overrightarrow{x}$ et X. Déterminer $||\varphi|| = \sup\limits_{||\overrightarrow{x}||=1} ||\varphi(\overrightarrow{x})|| = ||A|| = \sup\limits_{||X||=1} ||AX||$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant munis des normes euclidiennes usuelles (on rappelle que $||A||$ est alors la racine carrée de la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$).

c/ Pourquoi la sphère-unité $\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 / ||\overrightarrow{x}|| = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle un compact de $\mathbb{R}^3$? (on pourra utiliser la question préliminaire a/ pour montrer que c'est un fermé.)

Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & ||AX|| \end{array}$ est continue.

En déduire qu'il existe nécessairement un X_0 sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^3$ tel que $||AX_0|| = ||A||$.
En exhiber un (prendre un vecteur propre de ${}^tAA$ correspondant à la plus grande des valeurs propres).

2. (8 points) Soit $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||^2} \end{array}$ (j est l'inversion de pôle O et de puissance 1)

a/ En écrivant que $j = q \circ p$, où $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & (\overrightarrow{x}, ||\overrightarrow{x}||^2) \end{array}$ et $q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{y},\, t) & \mapsto & \dfrac{\overrightarrow{y}}{t} \end{array}$

calculer la différentielle $j'(\overrightarrow{x})$ de j en $\overrightarrow{x}$ (vérifier pour cela que $p'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{h},\, 2\left\langle \overrightarrow{x},\, \overrightarrow{h} \right\rangle)$ et que $q'(\overrightarrow{y},\, t)(\overrightarrow{k},\, u) = \dfrac{\overrightarrow{k}}{t} - \dfrac{\overrightarrow{y}u}{t^2}$; on pourra admettre ces résultats si nécessaire).

b/ En déduire que $j'(\overrightarrow{x})$ est une similitude indirecte, composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{||\overrightarrow{x}||^2}$, et de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\overrightarrow{x}^{\perp}$.

c/ Une des propriétés des similitudes est de conserver les angles non orientés de vecteurs : vérifier en particulier ici que, si $\overrightarrow{e_i}$ est l'un des vecteurs de la base canonique,

$$(\widehat{j'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{e_i}), j'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{x})}) = (\widehat{\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{x}})$$

T.S.V.P.

3. (8points) Dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$, on donne $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ d'abscisses $x_i (0 \leq i \leq n)$ toutes distinctes. On sait qu'il existe alors un et un seul polynôme de degré $\leq n$, appelé polynôme d'interpolation de Lagrange, soit L, tel que $\forall i,\ L(x_i) = y_i$: L est en effet donné par la formule : $L = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$. On cherche ici à résoudre le problème suivant : trouver la droite de régression linéaire $y = ax + b$ qui minimise la somme des carrés $S(a,b) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$. On note dans la suite $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel (de dimension $n+1$) des polynômes de degré $\leq n$, et $F = \mathbb{R}_1[X]$ son sous-espace vectoriel constitué des polynômes de degré ≤ 1, i.e. de la forme $aX + b$.

a/ Montrer que l'application : $\begin{array}{rcl} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) Q(x_i) \end{array}$ définit un produit scalaire sur E (N.B. : un polynôme de degré $\leq n$ ne peut avoir plus de n racines sans être identiquement nul !).

On notera dans la suite $||P|| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ la norme déduite de ce produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

b/ Montrer que $S(a,b) = ||L - (aX + b)||^2$. En déduire que minimiser $S(a,b)$ revient à trouver le projeté orthogonal du polynôme d'interpolation de Lagrange L sur F, i.e. à trouver a et b tels que $aX + b$ soit ce projeté orthogonal.

c/ En déduire que a et b sont déterminés par les deux conditions :

$$\langle 1, L - (aX + b) \rangle = 0 \text{ et } \langle X, L - (aX + b) \rangle = 0$$

Trouver a et b en fonction des x_i et des y_i (on exprimera a et b à l'aide des quantités $\overline{X} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i$, $\overline{Y} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \right) - \overline{X}^2$, et $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i \right) - \overline{XY}$, et on vérifiera que $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X} = \overline{Y} - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \overline{X}$). Cela vous rappelle-t-il votre cours de probabilités ?

d/ Calculer $\frac{\partial S}{\partial a}$ et $\frac{\partial S}{\partial b}$ et montrer que le gradient de S s'annule exactement pour les valeurs de a et b trouvées en c/.