UNIVERSITÉ PARIS VIII — **CALCUL DIFFÉRENTIEL**

Licence de mathématiques — **2004-2005**

<u>Examen partiel du 17 décembre 2004</u>

1. (8 points) *(Résolution approchée au sens des moindres carrés d'un système linéaire incompatible)* Soit φ une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p > n$, de matrice A dans les bases canoniques, et soit l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{b} \notin Im\,\varphi$ (NB : on a $p > n$, il y a donc plus d'équations que d'inconnues). On va voir qu'il existe néanmoins un unique $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^n$ qui minimise $\left|\left|\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{b}\right|\right|$; cet $\overrightarrow{x}$ sera dit solution de l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$ au sens des moindres carrés.

a/ Montrer que l'injectivité de φ implique que la matrice ${}^tAA$ est une matrice (n,n) inversible (prendre $\overrightarrow{x} \in Ker\,{}^tAA$ et montrer que $||A\overrightarrow{x}||^2 = 0$; en déduire que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et donc que ${}^tAA$ est la matrice d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$).

b/ Montrer que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{b}$ sur $Im\,\varphi$ est le vecteur $A\left({}^tAA\right)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$ (on rappelle que $\overrightarrow{y}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{x}$ sur F ssi i) $\overrightarrow{y} \in F$ et ii) $\forall \overrightarrow{z} \in F$, $(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{z}$).

c/ En déduire que l'unique solution au sens des moindres carrés de l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$ est le vecteur $\left({}^tAA\right)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$.

d/ Retrouver ce résultat par le calcul différentiel en calculant le gradient de l'application $\overrightarrow{x} \mapsto \left|\left|\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{b}\right|\right|^2$.

e/ Application : résoudre au sens des moindres carrés le système incompatible $\left\{\begin{array}{rcr} x + 3y & = & 1 \\ 2x + 2y & = & 2 \\ 3x + \ \ y & = & -1 \end{array}\right.$.

2. (6 points) *(Interprétation géométrique du gradient)* Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ (z est la cote du point $M(x,y,z)$ sur (S)). On appelle *ligne de niveau* k sur (S) la courbe intersection de (S) avec le plan horizontal d'équation $z = k$; on supposera que chaque ligne de niveau admet dans le plan $z = k$ une paramétrisation différentiable $t \mapsto \overrightarrow{\gamma(t)}$, i.e. telle que $f(x,y) = k \iff \exists t,\ (x,y) = \overrightarrow{\gamma(t)}$. On appelle direction de plus grande pente (en projection sur $\mathbb{R}^2$) en un point M_0 de (S) la direction de vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la dérivée $\dfrac{d}{dt}_{|t=0} f\left(M_0 + t\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{d}{dt}_{|t=0} f\left(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y\right)$ (dérivée directionnelle de direction $\overrightarrow{v}$ de f en M_0) soit maximale. Montrer que :

a/ le gradient de f est en tout point $M_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ de (S) orthogonal à la ligne de niveau $\{z = f(x_0,y_0),\ f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$ sur (S) passant par M_0 (i.e. orthogonal au vecteur tangent $\overrightarrow{\gamma'(0)}$ si $t \mapsto \overrightarrow{\gamma(t)}$ est une paramétrisation de la ligne de niveau k : dériver pour cela l'égalité $f\left(\overrightarrow{\gamma(t)}\right) = k$) ;

b/ la direction de plus grande pente (en projection sur $\mathbb{R}^2$) en $M_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0)$ sur (S) est donnée par le vecteur $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}$ (écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en M_0 pour $t \mapsto f(M_0 + t\overrightarrow{v})$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : quand a-t-on égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?).

Application : Pour la surface (S) d'équation $z = f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, vérifier que les lignes de niveau $z = k$ (qu'on peut paramétrer par $x = a\sqrt{k}\cos t$, $y = b\sqrt{k}\sin t$) sont bien orthogonales au gradient de f ; le plan vertical dirigé par Oz et le gradient $\overrightarrow{\nabla_M f}$ (direction de plus grande pente en M) coupe (S) suivant une courbe (courbe de plus grande pente passant par M sur (S)) : en donner une équation dans ce plan pour $M(a\sqrt{k}\cos t, b\sqrt{k}\sin t, k) \in (S)$.

.../...

3. (6 points) Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$. Montrer que f applique le disque fermé $\overline{D}\left(\overrightarrow{0}, \sqrt{2}\right) = \{(x,y), x^2 + y^2 \leq 2\}$ dans lui-même. Calculer la matrice jacobienne J de f et sa norme euclidienne (rappel : $||J||$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tJJ$; après avoir calculé la matrice J, on posera pour simplifier les calculs $s = \sin\frac{x+y}{2}$ et $c = \cos\frac{x-y}{2}$ et on vérifiera ici que ${}^tJJ$ a pour valeurs propres $\frac{c^2}{2}$ et $\frac{s^2}{2}$). En déduire, à l'aide de la formule des accroissements finis, que f est contractante de $\overline{D}\left(\overrightarrow{0}, \sqrt{2}\right)$ dans lui-même. Montrer en particulier l'existence d'un unique point fixe pour f dans le disque $\overline{D}\left(\overrightarrow{0}, \sqrt{2}\right)$ et en proposer un algorithme de calcul numérique par la méthode des approximations successives.

4. (4 points) Extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto xy(2 - x - y)$ (calculer gradient et hessienne de f : on trouvera 4 points critiques pour f, parmi lesquels un seul donnera une matrice hessienne définie négative, les trois autres donnant des matrice hessiennes à valeurs propres de signes opposés).
