UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2003-2004**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen partiel du 10 mai 2004

1. (7 points) *(Résolution approchée au sens des moindres carrés d'un système linéaire incompatible)* Soit φ une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p > n$, de matrice A dans les bases canoniques, et soit l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{b} \notin Im\,\varphi$ (NB : on a $p > n$, il y a donc plus d'équations que d'inconnues). On va voir qu'il existe néanmoins un unique $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^n$ qui minimise $\left|\left|\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{b}\right|\right|$; cet $\overrightarrow{x}$ sera dit solution de l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$ au sens des moindres carrés.

a/ Montrer que l'injectivité de φ implique que la matrice ${}^tAA$ est une matrice (n, n) inversible (prendre $\overrightarrow{x} \in Ker\,{}^tAA$ et montrer que $||A\overrightarrow{x}||^2 = 0$; en déduire que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et donc que ${}^tAA$ est la matrice d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$).

b/ Montrer que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{b}$ sur $Im\,\varphi$ est le vecteur $A\left({}^tAA\right)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$ (on rappelle que $\overrightarrow{y}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{x}$ sur F ssi i) $\overrightarrow{y} \in F$ et ii) $\forall \overrightarrow{z} \in F$, $(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{z}$).

c/ En déduire que l'unique solution au sens des moindres carrés de l'équation $\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$ est le vecteur $\left({}^tAA\right)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$.

d/ Retrouver ce résultat par le calcul différentiel, par exemple en calculant le gradient de l'application $\overrightarrow{x} \mapsto \left|\left|\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{b}\right|\right|^2$.

e/ Application numérique : résoudre au sens des moindres carrés le système $\left\{\begin{array}{rcr} x + 3y & = & 1 \\ 2x + 2y & = & 2 \\ 3x + y & = & -1 \end{array}\right.$.

2. (7 points) Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \left(\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right), \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)$. Calculer la matrice jacobienne de f et sa norme euclidienne (rappel : $||A||$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tAA$) et en déduire, à l'aide de la formule des accroissements finis, que f est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f applique le cercle-unité dans lui-même et en déduire l'existence d'un unique point $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle-unité qui soit point fixe pour f, et que θ est lui-même l'unique solution de l'équation $\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$, solution qui est dans $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

3. (5 points) On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dans les bases canoniques. Montrer que la norme euclidienne de A est $2\sqrt{6}$ (calculer les valeurs propres de ${}^tAA$). Peut-on prévoir a priori l'existence d'un $\overrightarrow{x}$ de S^2 (sphère-unité de $\mathbb{R}^3$) tel que $||\varphi(\overrightarrow{x})|| = 2\sqrt{6}$? En exhiber un (N.B. : le sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de ${}^tAA$ est $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$).

4. (5 points) Calculer le gradient de l'application $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ associe $g\left(\overrightarrow{x}\right) = a\left|\left|\overrightarrow{x}\right|\right|^2 + b < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{k} > + c$ (où $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^n$). Montrer qu'il existe un unique $\overrightarrow{x_0}$ où g est minimum sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $g(\overrightarrow{x_0}) = \min\limits_{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n} g\left(\overrightarrow{x}\right)$), et calculer ce minimum. Pourquoi n'est-ce pas un maximum ? (indication : que se passe-t-il lorsque $||\overrightarrow{x}|| \longrightarrow +\infty$?)