UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2002-2003**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen partiel du 18 décembre 2002 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) Déterminer les extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x^3 - 5y^3 + 10x + 10y$$

2. (6 points) On donne les applications $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{x=0\} \setminus \{y=0\} \setminus \{z=0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ et $\psi(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2$. Calculer la matrice jacobienne $J_{(x,y,z)}\varphi$ et le gradient $\overrightarrow{\nabla_{(u,v,w)}\psi}$; en déduire le gradient $\overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi}$ de $\psi \circ \varphi$ (on montrera que $\overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi} = {}^t\left[J_{(x,y,z)}\varphi\right] \overrightarrow{\nabla_{\varphi(x,y,z)}\psi}$). Calculer la hessienne $\nabla^2_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(1,1,1)$ pour $\psi \circ \varphi$. Par exemple en écrivant (vérifier cette formule) : $4(h^2+k^2+l^2-hk-kl-lh) = 3(h-k)^2 + (h+k-2l)^2$, montrer que cette hessienne en $(1,1,1)$ est positive, mais *non définie positive* (i.e. son noyau n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$). On admettra d'autre part que $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall c > 0, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$: vérifier que $(1,1,1)$ est pour $\psi \circ \varphi$ un minimum local (et d'ailleurs aussi global) *non strict* en remarquant que tout point de la droite $\{x = y = z\}$ donne lieu au même minimum, égal à 3, pour $\psi \circ \varphi$).

3. (4 points) Déterminer les axes (direction, longueur = distance entre un sommet et le sommet diamétralement opposé) de l'ellipse plane d'équation $q(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4$, en montrant que ce problème (maximisation / minimisation de $x^2 + y^2$ sous la contrainte $q(x,y) - 4 = 0$) revient en fait à rechercher valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de la forme quadratique q.

4. (6 points) Montrer, à l'aide de la formule des accroissements finis et du théorème du point fixe, que l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,y) = \left(\frac{1}{2}\left(\sin xy + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\cos xy + \frac{1}{2}\right)\right)$ applique $\overline{B}(0,1)$ dans $\overline{B}(0,1)$ et y admet un unique point fixe dont on donnera un algorithme de calcul à 10^{-3} près en x et en y (on rappelle que : 1/ la norme euclidienne d'une matrice A est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tAA$; 2/ dans la méthode des approximations successives, pour une application f contractante de rapport k, une suite $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overrightarrow{x_{n+1}} = f(\overrightarrow{x_n})$ converge vers le point fixe $\overrightarrow{\xi}$ de f avec une vitesse déterminée par la relation : $||\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\xi}|| \leq \frac{k^n}{1-k}||\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}||$, c'est-à-dire d'autant plus vite que k est plus petit).

5. (4 points) On cherche les extrema dans $\mathbb{R}^n$ de l'application φ définie par $\varphi(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||(1 - ||\overrightarrow{x}||)$. En s'aidant de la fonction : $r \mapsto r(1-r)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, montrer que :

a/ $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}\varphi}$ est partout défini sauf en $\overrightarrow{0}$ (calculer ce gradient) et ne s'annule que pour $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$;

b/ $\overrightarrow{0}$ n'est sûrement pas un extremum global pour φ ; en revanche, c'est sûrement un minimum local (N. B. : φ n'est pas différentiable en $\overrightarrow{0}$) ;

c/ aucun $\overrightarrow{x}$ tel que $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ ne peut être un extremum local *strict*, mais que tout $\overrightarrow{x}$ tel que $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ est un maximum local *non strict* pour φ.

Corrigé de l'examen partiel du 18 décembre 2002

1. On calcule : $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)} f} = 5 \begin{bmatrix} x^4 - 3x^2 + 2 \\ y^4 - 3y^2 + 2 \end{bmatrix}$, gradient qui n'est nul que lorsque $(x^2-1)(x^2-2) = 0$ et $(y^2-1)(y^2-2) = 0$, d'où 16 extrema possibles : $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$. On calcule alors $\nabla^2_{(x,y)} f = 20 \begin{bmatrix} x\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) & 0 \\ 0 & y\left(y^2 - \frac{3}{2}\right) \end{bmatrix}$. La recherche des points où $\nabla^2_{(x,y)} f << 0$ (maxima relatifs de f) et de ceux où $\nabla^2_{(x,y)} f >> 0$ (minima relatifs de f) met en évidence exactement 4 maxima : $(1,1)$, $(1,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},1)$ et $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et 4 minima : $(-1,-1)$, $(-1,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-1)$ et $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Aucun de ces extrema ne peut être un extremum *global*, puisque $\lim\limits_{x,y \longrightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$ et $\lim\limits_{x,y \longrightarrow -\infty} f(x,y) = -\infty$.

2. On calcule : $J_{(x,y,z)}\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{-y}{z^2} \\ \frac{-z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla_{(u,v,w)}\psi} = 2 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = {}^t J_{(u,v,w)}\psi$, d'où

$$ {}^t\overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi} = J_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi = J_{\varphi(x,y,z)}\psi \times J_{(x,y,z)}\varphi = 2 \begin{bmatrix} \frac{x}{y} & \frac{y}{z} & \frac{z}{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{-y}{z^2} \\ \frac{-z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix} = $$

$$ 2 \begin{bmatrix} \frac{x}{y^2} - \frac{z^2}{x^3} & \frac{y}{z^2} - \frac{x^2}{y^3} & \frac{z}{x^2} - \frac{y^2}{z^3} \end{bmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi} = 2 \begin{bmatrix} \frac{x}{y^2} - \frac{z^2}{x^3} \\ \frac{y}{z^2} - \frac{x^2}{y^3} \\ \frac{z}{x^2} - \frac{y^2}{z^3} \end{bmatrix} $$

Du calcul du gradient de $\psi \circ \varphi$ on déduit par dérivation la hessienne en (x,y,z) quelconque :

$$ \nabla^2_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} + 3\frac{z^2}{x^4} & \frac{-2x}{y^3} & \frac{-2z}{x^3} \\ \frac{-2x}{y^3} & \frac{1}{z^2} + 3\frac{x^2}{y^4} & \frac{-2y}{z^3} \\ \frac{-2z}{x^3} & \frac{-2y}{z^3} & \frac{1}{x^2} + 3\frac{y^2}{z^4} \end{bmatrix} $$

En $(1,1,1)$, le gradient est nul et la hessienne vaut $\nabla^2_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi = 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, et la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit donc :

$$ \psi \circ \varphi(1+h, 1+k, 1+l) - 3 = \begin{bmatrix} h & k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} + o(h^2 + k^2 + l^2) = $$
$$ 4(h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh) + o(h^2 + k^2 + l^2) = (3(h-k)^2 + (h+k-2l)^2) + o(h^2 + k^2 + l^2) $$

La hessienne en $(1,1,1)$ est bien positive, mais non définie positive, puisque son noyau, défini par $\{h-k=0,\ h+k-2l=0\}$ n'est pas réduit à zéro : c'est la droite $\{h=k=l\}$ de $\mathbb{R}^3$. On ne peut donc pas conclure à l'existence d'un minimum strict pour $\psi\circ\varphi$ en $(1,1,1)$. Et de fait, si l'on admet[1] que $\forall a>0, \forall b>0, \forall c>0, \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3$, il est clair que $(1,1,1)$ est pour $\psi\circ\varphi$ un minimum global (puisque $\psi\circ\varphi(1,1,1)=3$), donc aussi un minimum local. Mais comme en tout $x\neq 0$, $\psi\circ\varphi(x,x,x)=3$, tout voisinage de $(1,1,1)$ contient une infinité de points en lesquels $\psi\circ\varphi$ vaut 3 comme en $(1,1,1)$, et $(1,1,1)$ est bien un minimum (global et) local *non strict* pour $\psi\circ\varphi$.

3. D'après le théorème sur les extrema liés, la fonction n^2, carré de la norme euclidienne, ne pourra passer en (x,y) par un extremum sous la contrainte $q(x,y)-4=0$ que si en (x,y) les gradients $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)}q}$ et $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)}n^2}$ sont proportionnels. Or $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)}q}=\begin{bmatrix}10x+6y\\6x+10y\end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)}n^2}=\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}$, donc la condition s'écrit : $\exists\lambda\in\mathbb{R}, \begin{bmatrix}5x+3y\\3x+5y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, soit encore : $\begin{bmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, ce qui n'est possible en $(x,y)\neq(0,0)$ (car comme $q(0,0)\neq 4$, $(0,0)$ ne pourra être un extremum pour n^2 soumis à la contrainte $q(x,y)=4$) que si λ est valeur propre de la matrice $\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}$, matrice de la forme quadratique q (rappel : un système linéaire homogène n'a de solution différente de la solution nulle que si le déterminant du système est nul), et si $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ en est un vecteur propre associé à λ. Les valeurs propres sont 8 et 2, et on trouve pour vecteurs propres associés, respectivement $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

Pour $\lambda=8$, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ avec $q(x,y)=4$, soit $5\alpha^2+6\alpha^2+5\alpha^2=4$, d'où $\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$: $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ sont les 2 sommets opposés correspondants, et la longueur de l'axe qui les joint sur la première bissectrice est $\sqrt{2}$; de même, pour $\lambda=2$, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ avec $q(x,y)=4$, soit $5\alpha^2-6\alpha^2+5\alpha^2=4$, d'où $\alpha=\pm1$: $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont les 2 sommets opposés correspondants, et la longueur de l'axe qui les joint sur la deuxième bissectrice est $2\sqrt{2}$.

4. Il est clair que ψ est, comme les fonctions *sinus* et *cosinus*, indéfiniment différentiable. De plus $||\psi(x,y)||^2=\dfrac{1}{4}\left(\sin xy+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\left(\cos xy+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\sin^2 xy+\cos^2 xy+\dfrac{1}{2}+\sin xy+\cos xy\right)=$ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\sin\left(xy+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\leq 1$, donc l'image de ψ est incluse dans $\overline{B}(0,1)$.

1. $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}$ $\left(\text{ou encore } \dfrac{x^2}{y^2}, \dfrac{y^2}{z^2}, \dfrac{z^2}{x^2}\right)$ étant 3 nombres positifs dont le produit vaut 1, ceci peut aussi s'énoncer ainsi : $\forall x_1>0, \forall x_2>0, \forall x_3>0$, si $x_1.x_2.x_3=1$, alors $x_1+x_2+x_3\geq 3$. Plus généralement : $\forall x_1>0, \forall x_2>0, \ldots, \forall x_n>0$, si $x_1.x_2.\ldots.x_n=1$, alors $x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n$. Ceci résulte de la convexité de l'exponentielle : comme $\displaystyle\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$, alors $1=\exp\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)\leq\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n\exp(\ln x_i)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$. Mais donnons-en, dans le cas $n=3$, une démonstration élémentaire qui n'utilise pas la notion de convexité : d'abord $\forall x>0, \forall y>0, x+\dfrac{y}{x}\geq 2\sqrt{y}$ $\left(\text{car } \dfrac{1}{x}(x-\sqrt{y})^2\geq 0\right)$, donc $x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{y}+2\sqrt{y}\geq 3$ (car il est facile de vérifier que la fonction $y\mapsto\dfrac{1}{y}+2\sqrt{y}$ passe en $y=1$ par un minimum absolu, égal à 3), et donc en posant $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{a}{c}$, on a bien comme annoncé : $\forall a>0, \forall b>0, \forall c>0, \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3$.

Pour chercher si ψ est bien contractante de $\overline{B}(0,1)$ dans $\overline{B}(0,1)$, calculons la norme $||J_{(x,y)}\psi||$ de la jacobienne de ψ : $J_{(x,y)}\psi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y\cos xy & x\cos xy \\ -y\sin xy & -x\sin xy \end{bmatrix}$, d'où ${}^tJ_{(x,y)}\psi J_{(x,y)}\psi = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{bmatrix}$, qui a pour valeurs propres les racines de $\left(\frac{y^2}{4}-\lambda\right)\left(\frac{x^2}{4}-\lambda\right) - \frac{x^2y^2}{16} = \lambda\left(\lambda - \frac{x^2+y^2}{4}\right) = 0$. Il s'ensuit que $||J_{(x,y)}\psi|| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}} \leq \frac{1}{2}$ puisque $(x,y) \in \overline{B}(0,1)$. ψ est donc contractante de rapport $\frac{1}{2}$ de $\overline{B}(0,1)$ dans $\overline{B}(0,1)$. D'après le théorème du point fixe, ψ admet alors un unique point fixe $\overrightarrow{\xi}$ dans $\overline{B}(0,1)$, et d'après la méthode des approximations successives, $\overrightarrow{\xi}$ est obtenu comme limite de la suite $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\overrightarrow{x_0}$ quelconque, par exemple $\overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{x_{n+1}} = \psi(\overrightarrow{x_n})$, avec une vitesse de convergence vers $\overrightarrow{\xi}$ déterminée par $||\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{\xi}|| \leq 2^{-n+1}||\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}|| \leq 2^{-n+1}$. Il suffit alors de prendre $n = 11$ pour obtenir que $||\overrightarrow{x_{11}} - \overrightarrow{\xi}|| \leq 2^{-10} \leq 10^{-3}$. Le terme $\overrightarrow{x_{11}}$ de la suite ainsi définie est donc une valeur approchée de $\overrightarrow{\xi}$ à 10^{-3} près en $\sqrt{x^2+y^2}$, donc en x et en y (de même, si on voulait une valeur approchée de $\overrightarrow{\xi}$ à 10^{-6} près, le terme $\overrightarrow{x_{21}}$ de la suite conviendrait).

5. a/ La fonction $\varphi : \overrightarrow{x} \mapsto \varphi(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||(1 - ||\overrightarrow{x}||) = ||\overrightarrow{x}|| - ||\overrightarrow{x}||^2$ a pour gradient (cf. cours) $\frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} - 2\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}\left(\frac{1}{||\overrightarrow{x}||} - 2\right)$ qui est défini partout sauf en $\overrightarrow{0}$, est n'est nul que si $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$.

b/ $\overrightarrow{0}$ n'est pas un extremum global pour φ parce que $\varphi(\overrightarrow{0}) = 0$, alors que pour $0 < ||\overrightarrow{x}|| < 1$, $\varphi(\overrightarrow{x}) > 0$, tandis que pour $||\overrightarrow{x}|| \longrightarrow +\infty$, $\varphi(\overrightarrow{x}) < 0$. En revanche, pour tout $\overrightarrow{x}$ *non nul* dans $B(\overrightarrow{0},1)$, $\varphi(\overrightarrow{x}) > 0$ alors que $\varphi(\overrightarrow{0}) = 0$, donc $\overrightarrow{0}$ est un minimum local *strict* pour φ.

c/ Aucun $\overrightarrow{x}$ tel que $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ ne peut être un extremum local *strict* pour φ puisque tout voisinage de tout $\overrightarrow{x}$ tel que $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ contient une infinité de points (tous les points de la sphère d'équation $||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ qui sont dans ce voisinage) en lesquels φ a la même valeur qu'en $\overrightarrow{x}$. En revanche, puisque φ ne dépend que de $r = ||\overrightarrow{x}||$ et que la fonction $r \mapsto r(1-r)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ passe par un maximum, égal à $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$, tout $\overrightarrow{x}$ tel que $r = ||\overrightarrow{x}|| = \frac{1}{2}$ est un maximum (d'ailleurs global aussi bien que local) pour φ, mais un maximum *non strict*.