

Examen partiel du 19 décembre 2001

1. (4 points) Déterminer les extrema dans  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ .
2. (6 points) On donne les applications  $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0\} \setminus \{y = 0\} \setminus \{z = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :  $\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$  et  $\psi(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$ . Calculer la matrice jacobienne  $J_{(x,y,z)}\varphi$  et le gradient  $\overrightarrow{\nabla}_{(u,v,w)}\psi$ ; en déduire le gradient  $\overrightarrow{\nabla}_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi$  de  $\psi \circ \varphi$  (on montrera que  $\overrightarrow{\nabla}_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi = {}^t [J_{(x,y,z)}\varphi] \overrightarrow{\nabla}_{\varphi(x,y,z)}\psi$ ). Calculer la hessienne  $\nabla_{(x,y,z)}^2 \psi \circ \varphi$  et écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en  $(1, 1, 1)$  pour  $\psi \circ \varphi$ . En écrivant (vérifier cette formule) :  $4(h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh) = 3(h - k)^2 + (h + k - 2l)^2$ , montrer que cette hessienne est positive, mais *non définie positive* (i.e. son noyau n'est pas réduit à  $\{\vec{0}\}$ ). En déduire que  $(1, 1, 1)$  est pour  $\psi \circ \varphi$  un minimum local *non strict* (on pourra remarquer plus précisément que tout point de la droite  $\{x = y = z\}$  donne lieu au même minimum, égal à 3, pour  $\psi \circ \varphi$ ).

Dans toute la suite,  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'une b.o.n.  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ .

3. (8 points) On considère un système linéaire *surdéterminé*  $A\vec{x} = \vec{b}$ , où  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ , avec  $A$  matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes de rang  $n < p$  (il y a plus d'équations que d'inconnues, donc en général il n'y a pas de solution, mais la matrice  $A$  est supposée de rang maximum  $n$ , i.e. l'application linéaire sous-jacente est injective).

Exemple (à traiter en application) : 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (\text{vérifier qu'il n'y a pas de solution}).$$

On se propose de déterminer le vecteur  $\vec{x}$  qui minimise la norme euclidienne  $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$  (on dit aussi : "qui soit solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  au sens des moindres carrés").

Calculer le gradient de l'application  $f : \vec{x} \mapsto \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$  (indication : composer l'application  $\vec{x} \mapsto A\vec{x} - \vec{b}$  avec l'application  $\vec{y} \mapsto \|\vec{y}\|^2$  pour obtenir que  $f'(\vec{x})(\vec{h}) = 2 \langle A\vec{x} - \vec{b}, A\vec{h} \rangle$ , autrement dit que  $\overrightarrow{\nabla}_{\vec{x}} f = 2 {}^t A(A\vec{x} - \vec{b})$ ) et en déduire qu'en un point  $\vec{x}$  extrémal (= critique) pour  $f$ , on a :  ${}^t AA\vec{x} = {}^t A\vec{b}$ . Montrer que le fait pour  $A$  d'être de rang maximum implique que  ${}^t AA$  est inversible (indication : d'après l'hypothèse,  $A$  est la matrice d'une application linéaire injective de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , i.e. si  $A\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\vec{x} = \vec{0}$ ; prendre alors  $\vec{u} \in \text{Ker } {}^t AA$  et montrer que  $\vec{u} = \vec{0}$  :  ${}^t AA$  est donc la matrice d'une application linéaire injective de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, i.e. d'un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ ). En déduire que le seul extremum pour  $f$  est  $\vec{x} = ({}^t AA)^{-1} {}^t A\vec{b}$ . Montrer que la hessienne  $\nabla_{\vec{x}}^2 f$  de  $f$  est égale pour tout  $\vec{x}$  à  $2 {}^t AA$  (N.B. : remarquer que le gradient de  $f$  est affine en la variable  $\vec{x}$ ). Montrer qu'elle est définie positive en tout  $\vec{x}$  et en déduire que l'extremum local déterminé précédemment est un minimum pour  $f$  : c'est la "solution au sens des moindres carrés" cherchée. Application numérique : calculer la solution au sens des moindres carrés de l'exemple introductif.

**4. (12 points)** a/ Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + a$ , où  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  et en déduire, à l'aide de la formule des accroissements finis, que  $f$  est contractante de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. En déduire que  $\forall a \in \mathbb{R}$ , l'équation en  $x : \frac{\frac{1}{2} + x^2}{1+x^2}x = a$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$ . Application numérique: en prenant  $a = \frac{1}{2}$ , montrer que l'équation en  $x : x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$  a une seule racine réelle. En donner un algorithme de calcul approché à l'aide de la méthode des approximations successives (définir une suite récurrente de la forme  $x_{n+1} = f(x_n)$ ).

b/ Soit l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{1+|z|^2} + a$ , où  $a \in \mathbb{C}$ , qui peut encore s'écrire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2 : f : (x, y) \mapsto \left( \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2+y^2} + \Re(a), \frac{\frac{1}{2}y}{1+x^2+y^2} + \Im(a) \right)$ . Calculer la matrice jacobienne de  $f$  comme application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même; vérifier qu'elle est symétrique (on rappelle qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux) et que ses valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}(1 \pm (x^2 + y^2))}{(1+x^2+y^2)^2}$ . En utilisant la décomposition dans  $\mathbb{R}^2 : \vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$ , où  $\vec{h}_1$  et  $\vec{h}_2$  sont des vecteurs propres (orthogonaux) de  $J_{(x,y)}f$ , et en développant  $\|J_{(x,y)}f \cdot \vec{h}\|^2$ , montrer que  $\|J_{(x,y)}f\| \leq \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$  et en déduire que  $f$  est contractante de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même et que  $\forall a \in \mathbb{C}$ , l'équation en  $z : \frac{\frac{1}{2} + |z|^2}{1+|z|^2}z = a$  a une seule solution dans  $\mathbb{C}$ . Application numérique: en prenant  $a = \frac{1+i}{2}$ , montrer que le système d'équations en  $x$  et  $y$ :

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)x - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \\ (x^2 + y^2)y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

a une seule solution dans  $\mathbb{R}^2$ . Proposer un algorithme (dans  $\mathbb{R}^2$  ou dans  $\mathbb{C}$ ) pour en donner une valeur approchée.

c/ Plus généralement, soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par:  $f(\vec{x}) = \frac{\frac{1}{2}\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|^2} + \vec{a}$ , où  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Vérifier que la différentielle de  $f$  est donnée par:  $f'(\vec{x})(\vec{h}) = \frac{\frac{1}{2}\vec{h}}{1+\|\vec{x}\|^2} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{h} \rangle \vec{x}}{(1+\|\vec{x}\|^2)^2}$  (différentiation des fonctions composées; on pourra admettre ce résultat) et en déduire l'expression suivante de la matrice jacobienne de  $f : J_{\vec{x}}f = \frac{\frac{1}{2}}{1+\|\vec{x}\|^2} \left[ I - 2 \frac{\vec{x} \cdot {}^t\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|^2} \right]$ . Chercher les vecteurs propres de l'endomorphisme  $f'(\vec{x})$  de  $\mathbb{R}^n$  sous la forme  $\vec{h} = t\vec{x}$ , où  $t \in \mathbb{R}$ , d'une part, et  $\vec{h} \in \{\vec{x}\}^\perp$  d'autre part, et en déduire la diagonalisation de  $f'(\vec{x})$  (on vérifiera que dans la décomposition en somme directe orthogonale:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\vec{x} \oplus \{\vec{x}\}^\perp$ ,  $\mathbb{R}\vec{x}$  est sous-espace propre, associé à la valeur propre  $\frac{\frac{1}{2}(1-\|\vec{x}\|^2)}{(1+\|\vec{x}\|^2)^2}$  et que  $\{\vec{x}\}^\perp$  est aussi sous-espace propre, associé à la valeur propre  $\frac{\frac{1}{2}}{1+\|\vec{x}\|^2}$ ). En déduire (comme en b/) que  $f$  est contractante de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même

et que  $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , l'équation en  $\vec{x} : \frac{\frac{1}{2} + \|\vec{x}\|^2}{1+\|\vec{x}\|^2}\vec{x} = \vec{a}$  a une seule solution dans  $\mathbb{R}^n$ . Application numérique: en prenant  $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \dots + \frac{1}{2}\vec{e}_n$ , proposer un algorithme dans  $\mathbb{R}^n$  pour donner une valeur approchée de cette solution.