UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques **2000-2001**

Examen partiel du 9 juin 2001

1. (6 points) Soit l'application $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$ associe $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Montrer que cette application permet de définir une application Sin de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par : $\mathrm{Sin}(x, y) = (\Re e(\sin(x + iy)), \Im m(\sin(x + iy)))$, que l'on explicitera à l'aide des fonctions trignométriques et hyperboliques élémentaires. Calculer la matrice jacobienne de l'application Sin dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est *conforme* lorsque sa différentielle est une similitude. Montrer que l'application Sin est conforme (indication : vérifier que les deux vecteurs colonnes de la matrice jacobienne sont orthogonaux et de même norme, norme qui est le rapport de la similitude). En déduire que si $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\delta : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux applications C^1 de I dans le plan telles que les courbes $\gamma(I)$ et $\delta(I)$ se coupent en $M = \gamma(0) = \delta(0)$ suivant un angle (non orienté, modulo π) θ, (i.e. $< \overrightarrow{\gamma'(0)}, \overrightarrow{\delta'(0)} >= \left|\left|\overrightarrow{\gamma'(0)}\right|\right| . \left|\left|\overrightarrow{\delta'(0)}\right|\right| . \cos\theta$), alors $\mathrm{Sin} \circ \gamma(I)$ et $\mathrm{Sin} \circ \delta(I)$ sont deux courbes C^1 du plan qui se coupent en $\mathrm{Sin}(M)$ suivant le même angle θ (on rappelle qu'une similitude conserve les angles).

2. (4 points) Points critiques et extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par : $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

3. (6 points) On se propose de déterminer les sommets et les axes de la conique de $\mathbb{R}^3$ d'équations $f(X, Y, Z) = 4X^2 + 6Y^2 + 4Z^2 - 2XY + 2XZ - 2YZ = 33$ et $g(X, Y, Z) = X + Y + Z = 3$ en cherchant les extrema de la fonction carré de la norme : $n(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$ sous les contraintes $f(X, Y, Z) = 33$ et $g(X, Y, Z) = 3$.
Pour cela, on commencera par diagonaliser la matrice F de la forme quadratique f dans la base canonique (on trouvera trois valeurs propres : 3, 4, et 7) et on exprimera f, g et n dans une base *orthonormée* de vecteurs propres pour F (i.e. en choisissant la matrice de passage de la base canonique à la base propre *orthogonale*), base dans laquelle on montrera que, si l'on note U, V et W les nouvelles coordonnées, correspondant aux droites propres $Ker(F-3I)$, $Ker(F-4I)$ et $Ker(F-7I)$ (qui sont de directions $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivement), le problème devient : trouver les extrema de $U^2 + V^2 + W^2$ sous les contraintes $3U^2 + 4V^2 + 7W^2 = 33$ et $V = \sqrt{3}$. On résoudra alors ce problème dans la base propre, et on reviendra à la base canonique pour donner les résultats sous la forme des axes et des sommets de la conique en fonction de X, Y, et Z.

4. (6 points) a/ Déterminer les points critiques de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||\left(1 - ||\overrightarrow{x}||^2\right)$ (on pourra utiliser le fait que $f = \varphi \circ r$, où $r(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||$ et $\varphi(r) = r(1 - r^2)$).
b/ Montrer (tableau de variation de φ) que chaque point critique est pour f un maximum au sens large, mais jamais un maximum strict (choisir pour cela $\overrightarrow{y}$ tel que $||\overrightarrow{y}|| = ||\overrightarrow{x}||$, avec $||\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}||$ aussi petit que l'on veut, non nul). Que peut-on en déduire (sans calcul) pour les valeurs propres de la hessienne ?
c/ Le calcul effectif de la hessienne donne : $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f = (1 - 3r^2)\dfrac{1}{r}\left(I - \dfrac{\overrightarrow{x}.{}^t\overrightarrow{x}}{r^2}\right) - 6\dfrac{\overrightarrow{x}.{}^t\overrightarrow{x}}{r}$ (on pourra admettre ce résultat). Vérifier qu'en un point $\overrightarrow{x}$ critique pour f, la hessienne est de rang 1, et qu'elle a pour seules valeurs propres $-2\sqrt{3}$ (multiplicité 1) et 0 (multiplicité $n-1$). Montrer enfin que, toujours en un point critique pour f, la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit :

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{x}) = -3\sqrt{3} < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{h} >^2 + o(||\overrightarrow{h}||^2)$$

.