Examen partiel du 23 mai 2000

N.B. Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une base orthormée et de sa structure euclidienne usuelle.

1. (8 points) a/ On considère un système linéaire *surdéterminé* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^p$, avec A matrice à p lignes et n colonnes de rang $n < p$ (il y a plus d'équations que d'inconnues, donc en général il n'y a pas de solution), la matrice A étant supposée de rang maximum n (i.e. l'application linéaire sous-jacente est injective). On se propose de déterminer le vecteur $\overrightarrow{x}$ qui minimise la norme euclidienne $||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||$ (on dit aussi : “qui soit solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ au sens des moindres carrés”).

Calculer le gradient de l'application $f : \overrightarrow{x} \mapsto ||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||^2$. Montrer qu'en un point $\overrightarrow{x_0}$ critique pour f, on a : ${}^tAA\overrightarrow{x_0} = {}^tA\overrightarrow{b}$. Montrer que le fait pour A d'être de rang maximum implique que ${}^tAA$ est inversible (et n'admet donc pas 0 comme valeur propre !) **Calculer la hessienne $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f$ de f.** (N.B. : on pourra remarquer que le gradient de f est affine en $\overrightarrow{x}$.) **Montrer qu'elle est définie positive en tout $\overrightarrow{x}$ et en déduire l'existence d'un extremum local unique pour f que l'on déterminera.**

b/ On considère à présent un système linéaire *sous-déterminé* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^p$, avec A matrice à p lignes et n colonnes de rang $n > p$ (il y a plus d 'inconnues que d'équations, donc il y a une infinité de solutions), la matrice A étant supposée de rang maximum n (i.e. l'application linéaire sous-jacente est surjective). On se propose de déterminer celle des solutions qui a la plus petite norme possible, i.e. le vecteur $\overrightarrow{x}$ qui minimise la norme euclidienne $||\overrightarrow{x}||^2$ sous la contrainte $A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ (N.B. : la solution existe donc, c'est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{0}$ sur le sous-espace affine d'équation(s) $A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^n$).

Montrer l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{\lambda}$ de $\mathbb{R}^p$ (à constante multiplicative près le “vecteur des multiplicateurs de Lagrange”) tel qu'en la solution $\overrightarrow{x_0}$ du problème on ait : $\overrightarrow{x_0} = {}^tA\overrightarrow{\lambda}$, avec $A\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{b}$, d'où $A\ {}^tA\overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{b}$. Montrer que le fait pour A d'être de rang maximum implique que $A\ {}^tA$ est inversible et en déduire le calcul de la solution $\overrightarrow{x_0}$.

c/ Applications numériques :

c1. Déterminer la solution au sens des moindres carrés du système $\left\{\begin{array}{rcr} x + y &=& 1 \\ 3x + 2y &=& 2 \\ x - y &=& -1 \end{array}\right.$

c2. Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{0}$ sur la droite : $\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y + z &=& 1 \\ x + 2y - z &=& 2 \end{array}\right.$

2. (8 points) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, espace vectoriel euclidien, où l'on suppose F continue et *uniformément contractante en* $t \in I$, i.e. :

$$\exists k \in]0, 1[, \forall t \in I, \forall \overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n, \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, ||F(\overrightarrow{x}, t) - F(\overrightarrow{x_0}, t)|| \leq k||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}|| \quad (1)$$

a/ Montrer que pour chaque $t \in I$, l'équation en $\overrightarrow{x}$: $F(\overrightarrow{x}, t) = \overrightarrow{x}$ a une solution unique, que l'on notera $\overrightarrow{\xi(t)}$. Montrer que l'application $\xi : t \mapsto \overrightarrow{\xi(t)}$ est continue de I dans $\mathbb{R}^n$.

Indication :

Majorer $||\overrightarrow{\xi(t)} - \overrightarrow{\xi(t_0)}||$ en écrivant : $\overrightarrow{\xi(t)} - \overrightarrow{\xi(t_0)} = F(\overrightarrow{\xi(t)}, t) - F(\overrightarrow{\xi_0}, t) + F(\overrightarrow{\xi_0}, t) - F(\overrightarrow{\xi_0}, t_0)$ (en posant : $\overrightarrow{\xi(t_0)} = \overrightarrow{\xi_0}$) et utiliser l'inégalité de Lipschitz (1) d'une part, la continuité de F d'autre part.

b/ Application : en posant, pour $\overrightarrow{X}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$, $F(\overrightarrow{X},t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(x+y)+t \\ \frac{1}{2}\cos(x-y)-t \end{bmatrix}$, montrer que le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y)+t &= x \\ \frac{1}{2}\cos(x-y)-t &= y \end{cases}$ a une solution unique dans $\mathbb{R}^2$, que l'on notera $\overrightarrow{\Xi(t)}\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$, et que l'application $\Xi : t \mapsto \overrightarrow{\Xi(t)}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Indication :

On pourra calculer la jacobienne $J_{\overrightarrow{X}}F_t$ de $F_t : \overrightarrow{X} \mapsto F(\overrightarrow{X},t)$ et montrer que $\left|\left| J_{\overrightarrow{X}}F_t.\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right|\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{h^2+k^2}$ pour obtenir un rapport de contraction K pour F à l'aide du théorème des accroissements finis.

3. (8 points) On dit que $f : U \mapsto \mathbb{R}$, où U est un *ouvert convexe* de $\mathbb{R}^n$, est *convexe* ssi la partie $\{(\overrightarrow{x},z)/f(\overrightarrow{x}) \leq z\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est convexe ou, ce qui revient au même, ssi

$$\forall \overrightarrow{x} \in U, \forall \overrightarrow{y} \in U, \forall t \in [0,1], f((1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}) \leq (1-t)f(\overrightarrow{x})+tf(\overrightarrow{y}) \quad (1)$$

(inégalité de convexité)

a/ Montrer que si f est différentiable sur l'ouvert convexe U, à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est convexe ssi : $\forall \overrightarrow{x} \in U, \forall \overrightarrow{y} \in U, f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) \geq < \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}} f}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} > \quad (2)$

Indications :

-pour le sens direct (supposant f convexe) : définissant, pour $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ fixés, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par : $g(t) = f((1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y})$, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée g' donnée par $g'(t) = < \overrightarrow{\nabla_{(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}} f}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} >$; montrer alors, à l'aide de l'inégalité de convexité, que $\forall t \in]0,1]$, $f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) \geq \frac{g(t)-g(0)}{t}$ et faire tendre t vers 0.

-pour la réciproque (supposant l'inégalité (2) vraie) : appliquer l'inégalité de l'hypothèse entre $\overrightarrow{x}$ et $(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}$, d'une part, entre $\overrightarrow{y}$ et $(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}$, d'autre part, pour montrer que

$$f(\overrightarrow{x}) - f((1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}) \geq - < \overrightarrow{\nabla_{(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}} f}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} > t$$

et

$$f(\overrightarrow{y}) - f((1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}) \geq < \overrightarrow{\nabla_{(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y}} f}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} > (1-t)$$

Conclure, en multipliant la première inégalité par $(1-t)$ et la deuxième par t.

En déduire que si f, différentiable sur l'ouvert convexe U, est convexe, alors tout point critique pour f (i.e. où le gradient de f s'annule) est un minimum *global* dans U pour f.

b/ Montrer, à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2, que si f est 2 fois différentiable sur l'ouvert convexe U, f est convexe ssi $\forall \overrightarrow{x} \in U$, $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f \geq 0$.

c/ Application : on considère l'application $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $f(\overrightarrow{x}) = e^{\frac{1}{2}||\overrightarrow{x}||^2}$. Calculer $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}} f}$ et $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f$.

Indications : on trouvera $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}} f} = f(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{x}$ et $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f = f(\overrightarrow{x})(I + {}^t\overrightarrow{x}.\overrightarrow{x})$; en effet, $f(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{x}$ se dérive comme un produit et a donc pour différentielle en $\overrightarrow{h}$: $f'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}).\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{h}$, vecteur dont le produit scalaire avec un vecteur quelconque $\overrightarrow{k}$ de $\mathbb{R}^n$ est, par définition de la différentielle seconde, exactement ${}^t\overrightarrow{k}.\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f.\overrightarrow{h}$.

Calculer $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f.\overrightarrow{y}$ a/ pour $\overrightarrow{y}$ orthogonal à $\overrightarrow{x}$; b/ pour $\overrightarrow{y}$ proportionnel à $\overrightarrow{x}$. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$. f admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}^n$?

N.B. Ces trois exercices sont très directement inspirés du *"Petit guide de calcul différentiel"* de F. Rouvière (Ed. Cassini, 1999, Paris) dont la lecture (rappels de cours et exercices corrigés) est vivement conseillée aux étudiants.