UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques **1998-99**

Examen final (2e session) du 16 septembre 1999

1. (4 points) Déterminer les extrema de la fonction $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

2. (6 points) Soit φ :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \varphi(\overrightarrow{X}) = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x-y \end{bmatrix} \end{array},$$

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ étant munis des bases canoniques et des structures euclidiennes usuelles. Donner la matrice A de φ dans ces bases.

On se propose de déterminer $||\varphi|| = \sup\limits_{\left\|\overrightarrow{X}\right\|=1} ||\varphi(\overrightarrow{X})||$. Montrer que $||\varphi||$ n'est autre que la racine carrée de $\sup\limits_{\left\|\overrightarrow{X}\right\|=1} {}^t\overrightarrow{X}{}^tAA\overrightarrow{X}$. On cherchera donc à déterminer le maximum de la forme quadratique $q(\overrightarrow{X}) = {}^t\overrightarrow{X}{}^tAA\overrightarrow{X}$ sous la contrainte pour $\overrightarrow{X}$ d'appartenir à la sphère-unité. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que ce maximum existe ? Le déterminer par le calcul différentiel et en déduire $||\varphi||$.

3. (8 points) Soit le système différentiel linéaire de $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}(1)$, où $A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a/ On suppose $a = 6$. Montrer que dans ce cas une des valeurs propres de A est nulle et que le système (1) est alors équivalent au système : $\left\{ \begin{array}{rcl} (2x+3y)' & = & 0 \\ (x-2y)' & = & -7(x-2y) \end{array} \right.$

En déduire que la solution générale du système (1) s'écrit alors :
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta e^{-7t} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, et que (en donnant à β la valeur 0) tout point de la droite $x - 2y = 0$ est un point d'équilibre pour le système (1) (N.B. : l'origine $(0,0)$ n'est donc pas le seul point d'équilibre : ce cas, qui se produit lorsqu'une des valeurs propres est nulle, i.e. lorsque A n'est pas inversible, est dit *dégénéré*).

b/ On suppose $a \neq 6$: A est alors inversible et l'origine $(0,0)$ est le seul point d'équilibre du système (1) ; le caractériser (nœud ? point-selle ? foyer ? ...) dans chacun des cas suivants : $a = 10$, $a = 1$, $a = -\frac{1}{4}$.

c/ Dans le cas où $a = 1$, calculer e^{tA} et résoudre le système différentiel linéaire avec second membre : $\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$, avec la condition initiale $\overrightarrow{X_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. (6 points) Soit le système différentiel non linéaire : $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2y - x + b \\ y' & = & -x^2y + 1 \end{array} \right.$, où $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer les points d'équilibre de ce système et donner, quand c'est possible, leur nature dans les cas suivants : $b = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Pourquoi ne peut-on pas conclure à l'aide du théorème de Hartman-Grobman sur la nature du point d'équilibre dans le cas où $b = 0$?