Examen final (2e session) du 14 septembre 1998

1. (6 points)
Préambule (ne faisant l'objet d'aucune question) :

- On peut définir le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, noté $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$, comme étant le vecteur de norme $||\overrightarrow{U}||.||\overrightarrow{V}||.|\sin(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}})|$ et dirigé comme le vecteur $\overrightarrow{w}$, orthogonal à $\overrightarrow{U}$ et à $\overrightarrow{V}$, et tel que $\det(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{w}) > 0$. On remarquera qu'ainsi $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires, et qu'un triangle ABC du plan affine euclidien usuel a une aire ($\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur) égale à $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.
- On rappelle que le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G du plan affine tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. En écrivant cette dernière égalité $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$, et en prenant le produit vectoriel des deux membres par $\overrightarrow{GC}$, puis par $\overrightarrow{GB}$, on obtient :
  $\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}$, d'où $||\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GC}|| = ||\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}||$, i.e. $Aire(GAC) = Aire(GBC)$, et de même :
  $\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{GB}$, d'où $||\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GB}|| = ||\overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{GB}||$, i.e. $Aire(GAB) = Aire(GBC)$, et au total : $Aire(GAB) = Aire(GBC) = Aire(GAC)$. On pourra admettre que cette propriété caractérise le centre de gravité G du triangle ABC.

Questions :
Soit ABC un triangle du plan affine euclidien usuel, M un point intérieur au triangle, H, K et L les pieds des perpendiculaires passant par M à (BC), (CA) et (AB), respectivement (faire un dessin). On se propose de déterminer le maximum du produit $MH.MK.ML$ lorsque M décrit l'intérieur du triangle ABC. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MH = x$, $MK = y$, $ML = z$. Ainsi, si S est l'aire du triangle ABC, on a : $ax + by + cz = 2S$.
Montrer que ce problème revient à trouver dans l'ensemble $\left\{0 \leq x \leq \frac{2S}{a}, 0 \leq y \leq \frac{2S}{b}, 0 \leq z \leq \frac{2S}{c}\right\}$ le maximum du produit xyz sous la contrainte $ax + by + cz = 2S$.
Pourquoi peut-on affirmer (sans calculs) que ce maximum existe et est atteint en un point de l'intérieur du triangle ? Résoudre le problème d'extrémum posé et montrer que ce maximum est atteint en un seul point, qui est le centre de gravité du triangle ABC.

2. (6 points) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'e.v. des polynômes à coefficients réels, sur lequel on donne la forme bilinéaire symétrique : $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$. Montrer que cette forme bilinéaire symétrique est en fait un produit scalaire sur E ; on notera $||P|| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Soit F le s.-e.v. de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On se propose de déterminer, pour tout polynôme P de E, son projeté orthogonal (relativement au produit scalaire défini plus haut) H sur F. H est ainsi défini par : a/ $H \in F$; b/ $||P - H||^2 = \inf_{S \in F} ||P - S||^2$. En écrivant $H = u.1 + v.X + w.X^2$ pour tout $H \in F$, donner les conditions d'extrémalité du b/ et les résoudre, i.e. trouver u, v, w en fonction de $M_0 = \int_{-1}^{1} P(x)dx$, $M_1 = \int_{-1}^{1} xP(x)dx$, $M_2 = \int_{-1}^{1} x^2 P(x)dx$. Montrer qu'on peut aussi trouver ces conditions en écrivant que H est caractérisé par : a/ $H \in F$; b/ $\forall S \in F$, $\langle P - H, S\rangle = 0$. Application : déterminer le projeté orthogonal sur F de $P = X^5 + 1$.

T.S.V.P.

3. (4 points) Montrer que l'équation $x^4 + y^3 - x - y = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ une fonction implicite indéfiniment dérivable $y = \varphi(x)$ dont on donnera un développement limité à l'ordre 4 en 0.

4. (4 points) Soit τ l'application de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\tau : (\theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x &= (4 - \cos\varphi)\cos\theta \\ y &= \sin\varphi \\ z &= (4 - \cos\varphi)\sin\theta \end{cases}$$

Montrer que τ est une immersion en tout point (θ, φ) ; en déduire que la surface (ou nappe paramétrée) $Im(\tau) = \tau([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ est en tout point une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Donner en particulier l'équation de son plan tangent en $(0, 0, 5)$ (i.e. pour $\varphi = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$) et en $(3, 0, 0)$ (i.e. pour $\varphi = 0$, $\theta = 0$).
(N.B. : $Im(\tau)$ est le tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oy dans $\mathbb{R}^3$ le cercle $\{x = 0, y^2 + (z - 4)^2 = 1\}$)