UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2004-2005**
Licence de mathématiques

Examen final du 9 février 2005

1. (5 points) Soit F l'aplication de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$F(x,y) = \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{2}, \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{x-y}{2}\right)$. Calculer la matrice jacobienne $J_{(x,y)}F$ de F et sa norme $||J_{(x,y)}F||$, et montrer que F est une application contractante de $[0,\pi]\times[0,\pi]$ dans lui-même. Montrer que le système $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{2} &= x \\ \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{x-y}{2} &= y \end{cases}$ a une solution unique (α,β) dans $[0,\pi]\times[0,\pi]$. Montrer que l'algorithme $\left\{\overrightarrow{u_{n+1}} = F\left(\overrightarrow{u_n}\right), \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{0}\right\}$ converge vers $\overrightarrow{u_\infty} = (\alpha,\beta)$, et que $\overrightarrow{u_{26}}$ en est une valeur approchée à 10^{-3} près en norme (on rappelle que si k est le rapport de contraction, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $||\overrightarrow{u_n} - \overrightarrow{u_\infty}|| \leq \frac{k^n}{1-k}||\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_0}||$).

2. (4 points) Extrema dans $\mathbb{R}^2$ de f définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2 - 4x - 4y$. (On pourra vérifier que la condition $\overrightarrow{\nabla_{x,y}f} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et que d'autre part $x^2 + xy + y^2 > 0$ quels que soient x et y non nuls.)

3. (4 points) Déterminer par le calcul différentiel (théorème des extrema liés) les axes (direction, longueur) de l'ellipse du plan affine $\mathbb{R}^2$ d'équation $13X^2 - 10XY + 13Y^2 = 36$.

4. (4 points) Montrer que l'équation $F(t,x,y) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(\sin x + \cos y) \\ e^{-\frac{t}{2}}(\cos x + \sin y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ définit au voisinage du point $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ une fonction implicite $\Phi : t \mapsto (x = \varphi(t), y = \psi(t))$ de classe C^∞ dont on donnera un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

5. (4 points) Montrer que la surface (S) de $\mathbb{R}^3$, d'équation $X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 = 0$ (c'est un hyperboloïde de révolution à deux nappes) est en chacun de ses points une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ qui se compose de deux parties disjointes : l'une dans le demi-espace $Z \geq 1$, l'autre dans le demi-espace $Z \leq -1$ (symétriques l'une de l'autre par rapport au plan $Z = 0$). Donner l'équation du plan affine tangent à (S) en $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ quelconque sur (S). Montrer que pour $Z \geq 1$, (S) est toujours au-dessus du plan tangent, et toujours au-dessous pour $Z \leq -1$ (exprimer Z en fonction de X et Y).

6. (4 points) Étant donné l'ensemble à n éléments $\{1,2,\ldots,n\}$, on appelle *probabilité* sur cet ensemble tout n-uplet $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ de nombres positifs ou nuls, et tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (p_i est la probabilité de l'événement i) ; on appelle *entropie d'information* de la probabilité $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ le nombre (positif ou nul) $H(p_1,p_2,\ldots,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ (où on prolonge par continuité en zéro la fonction $x \mapsto x\ln x$, i.e. en donnant à cette fonction la valeur 0 en 0). Montrer que la probabilité qui maximise l'entropie d'information est la probabilité *uniforme*, i.e. définie par : $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $p_i = \frac{1}{n}$. Pourquoi est-on sûr qu'un tel maximum existe ? (montrer que l'ensemble des probabilités $\{(p_1,\ldots,p_n) / \forall i, p_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} p_i = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$). Pourquoi le point $\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ est-il bien un maximum ? Quelle(s) probabilité(s) sur $\{1,2,\ldots,n\}$ pourrait-on définir pour rendre à l'inverse cette entropie *minimum* ?