UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2002-2003**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen final (2e session) du 3 juillet 2003 (suivi de son corrigé)

1. (6 points) Déterminer les points critiques dans $\mathbb{R}^3$ de la fonction $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x+y+z)^2 + 8(x+y+z)$. Écrire en chacun de ces points la formule de Taylor à l'ordre 2. On trouvera un extremum local srict d'une part, mais aussi un point critique $\overrightarrow{x_0}$ *dégénéré*, i.e. en lequel la matrice hessienne $\nabla^2 f$ admet 0 pour valeur propre, donc pour lequel on ne peut pas conclure sans un examen plus approfondi. Dans ce dernier cas, pour $\overrightarrow{h} \in \mathrm{Ker}\nabla^2 f$, calculer $f(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{x_0})$: montrer que cette expression change de signe suivant $\overrightarrow{h}$, et que $\overrightarrow{x_0}$ ne peut de ce fait être un extremum local pour f. Existe-t-il des extrema globaux pour f sur $\mathbb{R}^3$?

2. (4 points) Déterminer par le calcul différentiel (théorème des extrema liés) les axes (direction, longueur) de l'ellipse de $\mathbb{R}^2$ d'équation $8X^2 + 4XY + 5Y^2 = 9$.

3. (8 points) Le tore (T) obtenu en faisant tourner dans $\mathbb{R}^3$ un cercle de diamètre 1 autour d'un axe parallèle au plan du cercle et situé à une distance $\dfrac{3}{2}$ du centre du cercle peut être paramétré ainsi : $(T) = Im(F)$, avec $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ et F définie par :

$$F(\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2}\cos\theta(3+\cos\varphi),\ \frac{1}{2}\sin\theta(3+\cos\varphi),\ \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$$

Montrer que si $G(x,y,z) = (5 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2)^2 + 36z^2 - 9$, alors $(T) = G^{-1}(\{0\})$ (éliminer θ et φ entre les 3 équations $(x,\ y,\ z) = F(\theta,\varphi)$). Montrer de deux façons différentes que (T) est un compact de $\mathbb{R}^3$. Montrer que F restreinte à $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ est un plongement (immersion injective) de $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que G est une submersion en tout point de (T). En déduire que (T) est en tout point une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'espace affine tangent à (T) en $(1,0,0)$ et en $(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$ de deux manières distinctes (image de la différentielle de l'immersion ou noyau de la différentielle de la submersion).

4. (8 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $(x,y) \mapsto \left(1 + \dfrac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2}\ ,\ -1 + \dfrac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2}\right)$.

Calculer la matrice jacobienne de f et sa norme euclidienne (on rappelle que la norme euclidienne d'une matrice A est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^t\!AA$). En déduire à l'aide d'une majoration de cette norme et de la formule des accroissements finis que f est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, et qu'elle admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^2$. En aplication, donner un algorithme pour résoudre de manière numérique le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & x-1 \\ \dfrac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & y+1 \end{array}\right.$$

UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2002-2003**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Corrigé de l'examen final (2[e] session) du 3 juillet 2003

1. $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{0}$ ssi $\begin{cases} 4x^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \\ 4y^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \\ 4z^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \end{cases}$ d'où $x^3 = y^3 = z^3$, donc $x = y = z$, et $x^3 - 3x + 2 = 0$ (en divisant par 4). 1 est racine évidente, donc $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Les points critiques de f sont $(1,1,1)$ et $(-2,-2,-2)$. Et comme $\nabla^2 f = 4 \begin{bmatrix} 3x^2-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3y^2-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3z^2-1 \end{bmatrix}$, au point $(1,1,1)$: $\frac{1}{4}\nabla^2_{(1,1,1)} f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, d'où $\det\left(\frac{1}{4}\nabla^2_{(1,1,1)} f - \lambda I\right) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ et $\nabla^2_{(1,1,1)} f$ a pour valeurs propres 0 (simple) et 12 (double) ; de même au point $(-2,-2,-2)$: $\frac{1}{4}\nabla^2_{(-2,-2,-2)} f = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$, d'où $\det\left(\frac{1}{4}\nabla^2_{(-2,-2,-2)} f - \lambda I\right) = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 12-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 12-\lambda \end{vmatrix}$, et $\nabla^2_{(-2,-2,-2)} f$ a pour valeurs propres 36 (simple) et 48 (double). Donc en $(-2,-2,-2)$, $\frac{1}{4}\nabla^2_{(-2,-2,-2)} f$ est définie positive, et $(-2,-2,-2)$ est pour f un minimum strict ; en revanche, en $(1,1,1)$, $\nabla^2_{(1,1,1)} f$ est positive, mais pas définie positive, et on ne peut conclure immédiatement. Suivant les indications du texte, choisissons $\overrightarrow{h} \in Ker \nabla^2_{(1,1,1)} f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Big/ \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \right\} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, i.e. $\overrightarrow{h} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et calculons, avec $\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: $f\left(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{h}\right) - f\left(\overrightarrow{x_0}\right) = 3(1+h)^4 - 18(1+h)^3 + 24(1+h) - 3 + 18 - 24 = 12h^3 + o\left(h^3\right)$, qui change de signe avec h, donc $\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ n'est pas un extremum pour f. Il n'y a pas de maximum global, car ce serait aussi un maximum local, et on a vu qu'il n'y en avait pas ; en revanche le minimum $(-2,-2,-2)$ est un minimum global, car il n'y a pas d'autre minimum local et $f\left(\overrightarrow{x}\right) \longrightarrow +\infty$ pour $||\overrightarrow{x}|| \longrightarrow +\infty$.

2. On cherche les extrema de $n = X^2 + Y^2$ sous la contrainte $q(X,Y) = 8X^2 + 4XY + 5Y^2 - 9 = 0$. On sait qu'alors $\overrightarrow{\nabla n}$ et $\overrightarrow{\nabla q}$ sont proportionnels sur $q^{-1}(0)$, ce qu'on peut écrire, puisque $\overrightarrow{\nabla n}$ ne peut être nul sous la contrainte $q = 0$ (en effet $q(0,0) \neq 0$) : $\overrightarrow{\nabla n} = \lambda^{-1}\overrightarrow{q}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$, soit : $\begin{cases} 16X + 4Y &= \lambda.2X \\ 4X + 10Y &= \lambda.2Y \end{cases}$ avec $q(X,Y) = 8X^2 + 4XY + 5Y^2 - 9 = 0$, donc $(X,Y) \neq (0,0)$. Ceci est exactement dire que $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ est vecteur propre, associé à la valeur propre λ, de la matrice $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, d'où $\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$, soit : $\lambda = 4$ ou $\lambda = 9$.

- Pour $\lambda = 4$, on a $Y = -2X$, d'où $8X^2 - 8X^2 + 20X^2 = 9$, soit $X = \pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$, d'où les 2 sommets : $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

- Pour $\lambda = 9$, on a $X = 2Y$, d'où $32Y^2 + 8Y^2 + 5Y^2 = 9$, soit $Y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, d'où les 2 sommets : $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Il en résulte que les axes de cette ellipse sont : le grand axe : le segment porté par la droite d'équation $Y = 2X$, de longueur $2\sqrt{\dfrac{9}{20} + \dfrac{9}{5}} = 3$, joignant les sommets $\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$; et le petit axe : le segment porté par la droite d'équation $Y = \dfrac{1}{2}X$, de longueur $2\sqrt{\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}} = 2$, joignant les sommets $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3. Éliminons en effet ϑ et φ entre les 3 équations : $\begin{cases} 2x &= \cos\vartheta(3+\cos\varphi) \\ 2y &= \sin\vartheta(3+\cos\varphi) \\ 2z &= \sin\varphi \end{cases}$

On a $4z^2 = \sin^2\varphi$ et $4x^2+4y^2 = (3+\cos\varphi)^2 = 9+6\cos\varphi+1-4z^2$, d'où $\cos\varphi = \dfrac{4x^2+4y^2+4z^2-10}{6}$ et $\left(\dfrac{4x^2+4y^2+4z^2-10}{6}\right)^2 + (2z)^2 = 1$, c'est-à-dire $G(x,y,z) = (5-2x^2-2y^2-2z^2)^2+36z^2-9 = 0$, et donc $Im(F) \subset G^{-1}(\{0\})$. Inversement, si $G(x,y,z) = 0$, ce même calcul, mené à l'envers, conduit à $\left(\dfrac{4x^2+4y^2+4z^2-10}{6}\right)^2 + (2z)^2 = 1$ et on est en droit de poser : $\dfrac{2x^2+2y^2+2z^2-5}{3} = \cos\varphi$ et $2z = \sin\varphi$, d'où, en remplaçant z par $\dfrac{1}{2}\sin\varphi$ dans la première égalité :
$(2x)^2+(2y)^2 = 10-4z^2+6\cos\varphi = 1-4z^2+6\cos\varphi+9 = 1-\sin^2\varphi+6\cos\varphi+9 = (3+\cos\varphi)^2$ et on est alors en droit de poser : $2x = \cos\vartheta(3+\cos\varphi)$, $2y = \sin\vartheta(3+\cos\varphi)$, et donc $G^{-1}(\{0\}) \subset Im(F)$.

(T) est un compact de $\mathbb{R}^3$ comme image continue (par F) du compact $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ de $\mathbb{R}^2$, ou bien parce qu'il est borné ($-2 \leq X \leq 2$, $-2 \leq Y \leq 2$, $-\dfrac{1}{2} \leq Z \leq \dfrac{1}{2}$) et fermé comme image réciproque par G (continue parce que polynomiale) du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$.

Pour voir que F est injective, il suffit de reprendre les calculs montrant que $G^{-1}(\{0\}) \subset Im(F)$: on constate que φ est uniquement déterminé dans $[0,2\pi[$ par les conditions $\cos\varphi = \dfrac{2x^2+2y^2+2z^2-10}{3}$ et $\sin\varphi = 2z$, et de même ϑ par les conditions $\cos\vartheta = \dfrac{2x}{3+\cos\varphi}$ et $\sin\vartheta = \dfrac{2y}{3+\cos\varphi}$. Donc F est injective (et même bijective) de $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ dans (T).

Pour voir que F est une immersion, montrons que $J_{(\vartheta,\varphi)}F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin\vartheta(3+\cos\varphi) & -\frac{1}{2}\cos\vartheta\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\vartheta(3+\cos\varphi) & -\frac{1}{2}\sin\vartheta\sin\varphi \\ 0 & \frac{1}{2}\cos\varphi \end{bmatrix}$ est de rang 2 en tout (ϑ,φ) : ceci revient à voir que le produit vectoriel $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\vartheta} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\varphi}$ ne s'annule jamais.
Or $\left\|\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\vartheta} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\varphi}\right\| = \dfrac{3+\cos\varphi}{4}\sqrt{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi+\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \dfrac{3+\cos\varphi}{4} \geq \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\vartheta} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\varphi}$ ne s'annule jamais, et F est bien une immersion en tout point. Il en résulte (corollaire "I" du théorème d'inversion locale) que (T) est en tout point une sous-variété (compacte) de $\mathbb{R}^3$.

Pour voir que $G_{|(T)}$ est une submersion, il faut montrer que $\overrightarrow{\nabla G} = \begin{bmatrix} 8x(2x^2+2y^2+2z^2-5 \\ 8y(2x^2+2y^2+2z^2-5 \\ 8z(2x^2+2y^2+2z^2-5+72z \end{bmatrix}$ ne s'annule en aucun point de (T). Pour que $\overrightarrow{\nabla G}$ s'annule, il faut, soit que $x = 0$ et $y = 0$, et alors $z(z^2-5)+9z = 0$, donc $z = 0$, mais $G(0,0,0) \neq 0$: impossible, soit que $2x^2+2y^2+2z^2-5 = 0$ et que $z = 0$, mais pour un tel (x,y,z), $G(x,y,z) = -9 \neq 0$: également impossible. Donc $\overrightarrow{\nabla G}$ ne s'annule jamais sur $(T) = G^{-1}(\{0\})$. Il en résulte par un autre argument (corollaire "S" du théorème d'inversion locale) que (T) est en tout point une sous-variété (compacte) de $\mathbb{R}^3$.

Pour calculer $\overrightarrow{x_0} + T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$, espace affine tangent en $\overrightarrow{x_0}$ à (T), avec $\overrightarrow{x}$ de coordonnées (X,Y,Z) et $\overrightarrow{x_0}$ de coordonnées (X_0,Y_0,Z_0) :

- on peut écrire que $T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$ est l'image de la différentielle de l'immersion F, i.e. l'espace vectoriel engendré par $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi}$, qui a pour équation : $\begin{vmatrix} X & \vdots & \vdots \\ Y & \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} \\ Z & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$, et en (X_0,Y_0,Z_0), l'espace affine tangent a pour équation : $\begin{vmatrix} X-X_0 & \vdots & \vdots \\ Y-Y_0 & \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} \\ Z-Z_0 & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$ (encore faut-il déterminer ϑ_0 et φ_0 tels que $F(\vartheta_0,\varphi_0) = (X_0,Y_0,Z_0)$ sur le tore).
- on peut aussi écrire que $T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$ est le noyau de la différentielle de la submersion, i.e. l'espace vectoriel d'équation $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x_0}} G} >= 0$ et en (X_0,Y_0,Z_0), l'espace affine tangent a pour équation : $< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x_0}} G} >= 0$

On applique ces principes de calcul aux points $(1,0,0)$ et en $(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ de (T) :

En $(1,0,0)$, on a $\sin\varphi = 0$, d'où $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, donc $3+\cos\varphi = 4$ ou 2, d'où $X = 1 = 2\cos\vartheta$ avec $Y = 0 = 2\sin\vartheta$ (si $\varphi = 0$), ou $X = 1 = \cos\vartheta$ avec $Y = 0 = \sin\vartheta$ (si $\varphi = \pi$). Seul le deuxième cas est possible, donc $(1,0,0) = F(0,\pi)$, et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; de même, en $(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, on a $\cos\vartheta = 0$, d'où $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\varphi = 1$, donc $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3}{2}\sin\vartheta = \dfrac{3}{2}$, donc $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$; on a alors $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Par le second procédé (submersion), on trouve en $(1,0,0)$ que $\overrightarrow{\nabla_{(1,0,0)} G}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et en $(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ que $\overrightarrow{\nabla_{(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})} G}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Par un procédé comme par l'autre, on trouve finalement : $X = 1$ pour l'équation de l'espace affine tangent en $(1,0,0)$, et $Z = \dfrac{1}{2}$ pour l'équation de l'espace affine tangent en $(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

4. On calcule la matrice jacobienne de f : $J_{(x,y)}f = \dfrac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2} \begin{bmatrix} 2-x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & 2+x^2-y^2 \end{bmatrix}$.

Comme $A = J_{(x,y)}f$ est symétrique, ${}^tAA = A^2$ et la norme euclidienne de A n'est autre que sa plus grande valeur propre. Or les valeurs propres de $A = J_{(x,y)}f$ sont $\dfrac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2}$ fois les racines de $(2-x^2+y^2-\lambda)(2+x^2-y^2-\lambda)-4x^2y^2 = (2-\lambda)^2-(x^2-y^2)^2-4x^2y^2 = (2-\lambda)^2-(x^2+y^2)^2$, soit $\dfrac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2}\left(2 \pm (x^2+y^2)\right)q$, dont la plus grande est $\dfrac{\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$. D'après la formule des accroissements finis, $||f(x,y)-f(x',y')|| \leq \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left|\left|J_{(x,y)}f\right|\right| \sqrt{(x-x')^2+y-y')^2}$, soit $||f(x,y)-f(x',y')|| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x-x')^2+y-y')^2}$, i.e. f est bien contractante de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, et elle admet un unique point fixe (x,y) tel que $\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & x-1 \\ \dfrac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & y+1 \end{cases}$. Pour calculer numériquement (x,y), on utilise la méthode des approximations successives de Picard, i.e. on définit une suite de $\mathbb{R}^2$ par $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$, avec (x_0, y_0) quelconque. On sait qu'une telle suite converge vers le point fixe de f, i.e. la solution du système $\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & x-1 \\ \dfrac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} & = & y+1 \end{cases}$. Remarquons qu'on peut ici ramener le problème à un problème de point fixe dans $\mathbb{R}$, en choisissant $y_0 = -x_0$: en effet, si $y_n = -x_n$, alors $y_{n+1} = -1 + \dfrac{y_n\sqrt{2}}{2+x_n^2+y_n^2} = -1 - \dfrac{x_n\sqrt{2}}{2+x_n^2+y_n^2} = -x_{n+1}$, donc, par récurrence, $y_n = -x_n$ pour tout n, et en passant à la limite on trouvera aussi $y = -x$ avec $1 + \dfrac{x\sqrt{2}}{2+2x^2} = x$: x est solution de cette équation du troisième degré qui n'a pas de racine évidente (et $y = -x$). Si on pose $\varphi(x) = 1 + \dfrac{x\sqrt{2}}{2+2x^2}$, on a à résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de point fixe $\varphi(x) = x$, avec φ contractante puisque $|\varphi'(x)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, et on peut trouver x par la méthode des approximations successives dans $\mathbb{R}$: $x_0 = 0$ (par exemple), $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. On a alors $x = \lim\limits_n x_n$ (et $y = -x$). Les premiers termes de la suite sont : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \ldots$
