UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2002-2003**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen final du 6 février 2003 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) Extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = xy(1-x^4-y^4)$.

2. (6 points) Soit l'application linéaire φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \varphi(\overrightarrow{X}) = \begin{bmatrix} x+y-2z \\ x-2y+z \end{bmatrix} = A\overrightarrow{X}, \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ étant munis des bases canoniques et des structures euclidiennes usuelles. On se propose de déterminer $||\varphi|| = \sup\limits_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} ||\varphi(\overrightarrow{X})||$. Pourquoi est-on sûr que cette borne supérieure existe ? Montrer que $||\varphi||$ est la racine carrée de $\sup\limits_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} {}^t\overrightarrow{X}\,{}^tAA\overrightarrow{X}$, et, en diagonalisant ${}^tAA$ dans une base orthonormée formée de vecteurs propres [qu'il ne sera pas nécessaire d'expliciter], en déduire que $||\varphi||$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tAA$. Calculer $||\varphi||$. Retrouver ce résultat par le calcul différentiel (théorème des extrema liés) en cherchant à déterminer le maximum de la forme quadratique $q(\overrightarrow{X}) = {}^t\overrightarrow{X}\,{}^tAA\overrightarrow{X}$ sous la contrainte pour $\overrightarrow{X}$ d'appartenir à la sphère-unité.

3. (4 points) Soit F :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \overrightarrow{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) & \mapsto & F(t,\overrightarrow{Y}) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\sin x + \cos y) \\ e^{-t}(\cos x + \sin y) \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculer la matrice des dérivées partielles $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \overrightarrow{Y}} \end{bmatrix}$ et montrer que l'équation $F(t,\overrightarrow{Y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ définit au voisinage de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ une fonction implicite $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ dont on donnera un développement limité à l'ordre 3 en $t = 0$.

4. (6 points) Soit (C) la courbe de $\mathbb{R}^3$ intersection des deux surfaces : $\{f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$ (sphère) et $\left\{g(x,y,z) = (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}$ (cylindre).

Calculer la matrice jacobienne de $F : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{bmatrix}$ et montrer que (C) est en tout point, sauf en $A(1,0,0)$, une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Donner en particulier des équations et un vecteur directeur de la droite affine tangente à (C) en $M_0(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$.

Pour préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de $A(1,0,0)$, où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, on la paramètre par $\varphi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$.

Vérifier que $Im(\varphi)$ est bien incluse dans (C) ; on admettra que réciproquement, tout point de (C) est un $\varphi(t)$, pour un $t \in [0, 2\pi[$; vérifier que $A(1,0,0)$ est l'image de 2 points de $[0,2\pi[$: 0 et π. Calculer $\overrightarrow{\varphi'(0)}$ et $\overrightarrow{\varphi'(\pi)}$, et montrer que (C) admet en A deux tangentes dont on donnera des équations.

5. (4 points) Soit l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (\frac{1}{2}\cos(x+y), \frac{1}{2}\sin(x-y))$. En calculant la norme euclidienne de la matrice jacobienne JF de F (rappel : c'est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^t(JF)JF$), montrer que F est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et en déduire que le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} \cos(x+y) & = & 2x \\ \sin(x-y) & = & 2y \end{array}\right.$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}^2$.

UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2002-2003**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Corrigé de l'examen final du 6 février 2003

1. On calcule : $\overrightarrow{\nabla_{(x,y)}f} = \begin{bmatrix} y(1-5x^4-y^4) \\ x(1-x^4-5y^4) \end{bmatrix}$, qui n'est nul que pour : a/ $x = 0, y = 0$, ou b/ $x = 0, 1-5x^4-y^4 = 0$, soit $x = 0, y = \pm 1$, ou c/ $y = 0, 1-x^4-5y^4 = 0$, soit $x = \pm 1, y = 0$, ou enfin d/ $1-5x^4-y^4 = 0, 1-x^4-5y^4 = 0$, soit (en faisant la somme et la différence de ces deux égalités) $x = \pm y, y = \pm 6^{-\frac{1}{4}}$. Il y a donc 1+2+2+4=9 points critiques pour f dans $\mathbb{R}^2$. On calcule alors la matrice hessienne de f : $\nabla^2_{(x,y)}f = \begin{bmatrix} -20x^3y & 1-5x^4-5y^4 \\ 1-5x^4-5y^4 & -20xy^3 \end{bmatrix}$.

En $(0,0)$, $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et -1, donc $(0,0)$ est un point-selle (pas d'extremum) ; de même en $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 4 et -4, donc quatre autres points-selles (pas d'extremum). En revanche, en $(6^{-\frac{1}{4}}, 6^{-\frac{1}{4}})$ et $(-6^{-\frac{1}{4}}, -6^{-\frac{1}{4}})$, $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $-\frac{8}{3}$ et -4, toutes deux négatives, donc deux maxima locaux pour f, qui vaut en ces points $\frac{2}{3\sqrt{6}}$; et de la même façon, en $(6^{-\frac{1}{4}}, -6^{-\frac{1}{4}})$ et $(-6^{-\frac{1}{4}}, 6^{-\frac{1}{4}})$, $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $\frac{8}{3}$ et 4, toutes deux positives, donc deux minima locaux pour f, qui vaut en ces points $\frac{-2}{3\sqrt{6}}$. Il n'y a pas d'extremum global pour f dans $\mathbb{R}^2$ car il est clair qu'en choisissant x et y assez grands, on peut rendre $f(x,y)$ aussi grand que l'on veut, avec le signe que l'on veut (celui de $-xy$).

2. φ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, donc continue, et la sphère-unité $S^2 = \left\{\overrightarrow{X}, ||\overrightarrow{X}|| = 1\right\}$, fermé borné de $\mathbb{R}^3$, est compacte. Il en résulte que φ est bornée et atteint ses bornes sur S^2, en particulier sa borne supérieure $||\varphi||$. On a :

$$||\varphi|| = \sup_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} ||\varphi(\overrightarrow{X})|| = \sup_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} \sqrt{||\varphi(\overrightarrow{X})||^2} = \sup_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} \sqrt{{}^t\varphi(\overrightarrow{X})\varphi(\overrightarrow{X})} = \sup_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 1} \sqrt{{}^t\overrightarrow{X}\,{}^tAA\overrightarrow{X}}.$$

Soit ${}^tAA = {}^tQ\Lambda Q$ une réduction de ${}^tAA$ à la forme diagonale Λ, de termes diagonaux $\lambda, \mu, 0$ (tous positifs ou nuls, puisque ${}^tAA$ est la matrice de la forme quadratique $\left\|A\overrightarrow{X}\right\|^2$, positive ; 0 est nécessairement valeur propre de ${}^tAA$, puisque cette matrice est de rang 2 comme A), la matrice Q étant choisie orthogonale, avec $Q\overrightarrow{X} = \overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$; alors $\left\|\overrightarrow{X}\right\| = \left\|Q\overrightarrow{X}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\| = u^2+v^2+w^2$, d'où $||\varphi|| = \sup\limits_{u^2+v^2+w^2=1} \sqrt{{}^t\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{U}} = \sup\limits_{u^2+v^2+w^2=1} \sqrt{\lambda u^2 + \mu v^2 [+0w^2]} = \sqrt{\max(\lambda, \mu)}$ [la borne supérieure étant clairement atteinte, en supposant par exemple $\max(\lambda, \mu) = \lambda$, en $(u = 1, v = 0, w = 0)$], ce qu'il fallait démontrer. Dans le cas présent, ${}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 0, λ et μ solutions de l'équation caractéristique $\det({}^tAA - xI) = 0$, qui s'écrit, tous calculs faits, $x(x^2 - 12x + 27) = 0$, soit $\lambda = 9$ et $\mu = 3$. Il en résulte que $||\varphi|| = 3$.

Le traitement de la question par le théorème des extrema liés conduit à rechercher la racine carrée du maximum de la fonction ${}^t\overrightarrow{X}{}^tAA\overrightarrow{X}$ sous la contrainte $||\overrightarrow{X}||^2 = 1$. Ce maximum est obtenu pour un $\overrightarrow{X} \in S^2$ et un $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $2{}^t\overrightarrow{X}{}^tAA{=}2\lambda{}^t\overrightarrow{X}$ (proportionnalité des gradients), soit $({}^tAA-\lambda I)\overrightarrow{X}=\overrightarrow{0}$, d'où $\lambda = 9$, ou 3, ou 0, et ${}^t\overrightarrow{X}{}^tAA\overrightarrow{X} = \lambda{}^t\overrightarrow{X}\overrightarrow{X} = \lambda$ (pour $\overrightarrow{X} \in S^2$) sera maximum pour $\lambda = 9$, soit 3 pour la racine carrée, et donc $||\varphi|| = 3$.

3. On calcule : $\left[\dfrac{\partial F}{\partial \overrightarrow{Y}}\right] = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos x & -\sin y \\ -\sin x & \cos y \end{bmatrix}$, qui en $(0,0,0)$ vaut $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, évidemment inversible, donc d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(t,\overrightarrow{Y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ définit au voisinage de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ une fonction implicite $x = \varphi(t), y = \psi(t)$. Remarquons d'abord que cette équation implique que $x = y$. En effet, elle s'écrit : $\sin x + \cos y = e^t = \cos x + \sin y$, d'où en élevant au carré l'égalité $\sin x - \cos x = \sin y - \cos y$: $\sin 2x = \sin 2y$, soit $x = y + k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} - y + k\pi$, et comme (x,y) est dans un voisinage de $(0,0)$, c'est que $x = y$. Il faut donc trouver (puisque x et y sont dans un voisinage de 0, le terme constant du développement limité est nul) a, b, c tels que $\varphi(t) = \psi(t) = at + bt^2 + ct^3 + o(t^3)$, avec $\sin\varphi(t) + \cos\psi(t) = e^t$, soit $at + bt^2 + ct^3 - \dfrac{1}{6}a^3t^3 + 1 - \dfrac{1}{2}(at+bt^2+ct^3)^2 = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$. Tous calculs faits, on trouve $a = 1, b = 1, c = \dfrac{4}{3}$, i.e. $x = \varphi(t) = y = \psi(t) = t + t^2 + \dfrac{4}{3}t^3 + o(t^3)$.

4. On calcule : $J_{(x,y,z)}F = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{bmatrix}$, qui est de rang 2 en tout point où $z \neq 0$: en effet pour $z \neq 0$, soit $y \neq 0$ et alors $rg(J_{(x,y,z)}F) = 2$ car $\det\begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{bmatrix} \neq 0$, soit $y = 0$, et alors $x^2 = x$, d'où ou bien $x = 1$, mais alors $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implique $z = 0$, cas exclu, ou bien $x = 0$, et alors $rg(J_{(x,y,z)}F) = 2$ car $\det\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} = 2z \neq 0$. En revanche, si $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 - x = 0$, d'où $x = 1, y = 0, z = 0$, et $J_{(1,0,0)}F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 1. Donc d'après le théorème des fonctions implicites, F est sauf si $z = 0$, c'est-à-dire sauf en $A(1,0,0)$, une submersion et (C) est en tout point autre que A une sous-variété de dimension 3-2=1 de $\mathbb{R}^3$.

L'espace vectoriel tangent en M_0 à (C), $T_{M_0}C$, est pour $M_0 \neq A$ le noyau de la différentielle $d_{M_0}F$ de la submersion F, i.e. l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tels que $J_{M_0}F.\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$, et l'espace affine tangent est l'ensemble des points M tels que $J_{M_0}F.\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{0}$, ce qui peut encore s'écrire : $<\overrightarrow{\nabla_{M_0}f}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$, $<\overrightarrow{\nabla_{M_0}g}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$. Soit, dans le cas de $M_0(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$, 2 équations pour la droite affine tangente à (C) en M_0 : $\begin{cases} \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0 \end{cases}$

Et un vecteur directeur de la tangente $T_{M_0}C$ sera $\overrightarrow{\nabla_{M_0}f} \wedge \overrightarrow{\nabla_{M_0}g} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Il est facile de vérifier que $Im(\varphi)$ est bien incluse dans (C) :
en effet $(\cos^2 t)^2 + (\cos t \sin t)^2 + \sin^2 t = \cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t = \cos^2 + \sin^2 t = 1$ et $\left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right)^2 + (\sin t \cos t)^2 - \frac{1}{4} = \cos^4 t - \cos^2 t + \frac{1}{4} + \sin^2 t \cos^2 t - \frac{1}{4} = \cos^2 t - \cos^2 t = 0$.

Inversement, si l'on ne se contente pas d'"admettre" la surjectivité de φ, utilisons les coordonnées sphériques : pour tout (x,y,z) de la sphère $\{f(x,y,z) = 0\}$, il existe $u \in \,]-\pi, \pi]$ et $v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que $x=\cos u\cos v, y=\sin u\cos v, z=\sin v$. Mais comme $g(x,y,z)=0$ s'écrit aussi $x^2+y^2=x$, on doit avoir pour tout (x,y,z) de (C), $x=\cos u\cos v=\cos^2 v\geq 0$, donc $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Il faut donc trouver, pour u et v entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, un $t\in[0,2\pi[\ (mod.\,2\pi)$, pas nécessairement unique, tel que $\cos u\cos v=\cos^2 t, \sin u\cos v=\sin t\cos t, \sin v=\sin t$. Remarquons d'abord que l'égalité $\cos u\cos v=\cos^2 v$ implique (sauf en $v=\pm\frac{\pi}{2}$, où u n'est pas défini) que $\cos u=\cos v$, i.e. que $u=\pm v$; d'autre part l'égalité $\sin v=\sin t$ implique que $t=v$ ou $\pi-v$. On définit alors t ainsi :

- pour $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq 0,\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq 0$ (d'où $u=v$) on prend $t=u=v$, d'où $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq 0$
- pour $0\leq u\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq v\leq\frac{\pi}{2}$ (d'où $u=v$), on prend $t=u=v$, d'où $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$
- pour $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq 0,\ 0\leq v\leq\frac{\pi}{2}$ (d'où $u=-v$), on prend $t=\pi-v=\pi+u$, d'où $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\pi$
- pour $0\leq u\leq\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq 0$ (d'où $u=-v$), on prend $t=\pi-v=\pi+u$, d'où $\pi\leq t\leq\frac{3\pi}{2}$

d'où la surjectivité de φ. Comme $\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\varphi(\pi)$, $A(1,0,0)$ est l'image de 2 points distincts de $[0,2\pi[$ (ou $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$), en lesquels les vecteurs tangents à (C) sont distincts : $\overrightarrow{\varphi'(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\varphi'(\pi)}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, d'où par exemple $\{x{=}0, y{=}z\}$ pour des équations de la tangente dirigée par $\overrightarrow{\varphi'(0)}$ et $\{x{=}0, y{=}-z\}$ pour celles de la tangente dirigée par $\overrightarrow{\varphi'(\pi)}$. Cette situation, 2 tangentes distinctes, donc un point double sur (C), n'est possible qu'en $A(1,0,0)$, puisqu'en tout autre point, (C) est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1, donc admet un espace tangent de dimension 1 aussi, c'est-à-dire une (unique) droite tangente. Un tracé de (C) ferait apparaître un "huit" plaqué sur la sphère-unité, avec sommets aux pôles et un nœud en $A(1,0,0)$, courbe qui est appelée "fenêtre de Viviani".

5. On calcule : $J_{(x,y)}F=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sin(x+y) & \sin(x+y)\\ \cos(x-y) & -\cos(x-y)\end{bmatrix}$, d'où ${}^t(J_{(x,y)}F).J_{(x,y)}F=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sin^2(x+y)+\cos^2(x-y) & \sin^2(x+y)-\cos^2(x-y)\\ \sin^2(x+y)-\cos^2(x-y) & \sin^2(x+y)+\cos^2(x-y)\end{bmatrix}$, de valeurs propres $\frac{1}{4}\left(\sin^2(x+y)+\cos^2(x-y)\right)\pm\frac{1}{4}\left(\sin^2(x+y)-\cos^2(x-y)\right)=\frac{1}{2}\sin^2(x+y)$ et $\frac{1}{2}\cos^2(x-y)$, valeurs propres toutes deux majorés par $\frac{1}{2}$, donc (voir à ce propos la démonstration du "rappel" en **1.**) $\forall(x,y),\ ||J_{(x,y)}F||\leq\frac{\sqrt{2}}{2}<1$. Il en résulte, en appliquant en toute paire $(x,y),(x',y')$ de points de $\mathbb{R}^2$ la formule des accroissements finis : $||F(x,y)-F(x',y')||\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$, que F est bien contractante de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même ; et donc que l'équation $F(x,y)=(x,y)$, qui s'écrit aussi $\left\{\begin{array}{rcl}\cos(x+y)&=&2x\\ \sin(x-y)&=&2y\end{array}\right.$, admet bien une solution unique dans $\mathbb{R}^2$, dont on pourrait déterminer une valeur approchée par la méthode des approximations successives : c'est la limite de la suite $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $x_0=0, y_0=0$ (par exemple) et la relation de récurrence $(x_{n+1},y_{n+1})=F(x_n,y_n)$, limite dont on peut vérifier que par exemple (x_{20},y_{20}) en est une valeur approchée à 10^{-3} près.