Examen final (2$^{\text{e}}$ session) du 28 juin 2002

1. (5 points) Soit l'application $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
a/ Montrer en posant $z = x + iy$ qu'on définit naturellement à partir de cette application une application $\mathrm{Cos} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qu'on exprimera à l'aide de fonctions usuelles ($\sin$, $\cos$, ch, sh) et dont on calculera la matrice jacobienne et le jacobien.
b/ On dit qu'une application est *conforme* lorsque sa différentielle est une similitude, i.e. la composée d'un endomorphisme orthogonal par une homothétie. Montrer que l'application Cos est conforme (on pourra vérifier que les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne sont orthogonaux et de même norme, norme qui est le rapport de la similitude).

2. (5 points) On définit le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$, noté $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$, comme le vecteur de norme $||\overrightarrow{U}||.||\overrightarrow{V}||.|\sin(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}})|$ et dirigé comme le vecteur $\overrightarrow{W}$, orthogonal à $\overrightarrow{U}$ et à $\overrightarrow{V}$, et tel que $\det(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}) > 0$. On peut démontrer que le produit vectoriel a les propriétés suivantes : c'est une application bilinéaire et antisymétrique ($\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U} = -\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; de plus, $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires ; enfin il résulte facilement de sa définition qu'un triangle ABC du plan affine euclidien usuel a une aire ($\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur) égale à $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée convexe de classe C^1 du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, i.e. l'image de l'intervalle $[0,1]$ par une application de classe C^1 $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et telle que la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ soit un convexe. Montrer que parmi les triangles $\gamma(u)\gamma(v)\gamma(w)$ inscrits dans $\mathcal{C}$, il en existe au moins un qui soit d'aire maximum (utiliser les propriétés des fonctions continues sur un compact). Montrer que pour un tel triangle, en chacun de ses sommets, la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle au côté opposé à ce sommet. (*Indication : on pourra montrer que si* $\overrightarrow{V}(u,v,w) = \left(\overrightarrow{\gamma(v)} - \overrightarrow{\gamma(u)}\right) \wedge \left(\overrightarrow{\gamma(w)} - \overrightarrow{\gamma(u)}\right)$, *l'application* $\overrightarrow{V} : [0,1]^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a pour différentielle :*
$\overrightarrow{V}'(u,v,w)(h,k,l) = \overrightarrow{\gamma'(u)} \wedge \left(\overrightarrow{\gamma(v)} - \overrightarrow{\gamma(w)}\right).h + \overrightarrow{\gamma'(v)} \wedge \left(\overrightarrow{\gamma(w)} - \overrightarrow{\gamma(u)}\right).k + \overrightarrow{\gamma'(w)} \wedge \left(\overrightarrow{\gamma(u)} - \overrightarrow{\gamma(v)}\right).l$.)

3. (4 points) Déterminer les axes (direction, longueur) de l'ellipse de centre $O(0,0)$ et d'équation $q(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$ en cherchant les extrema de la fonction carré de la norme sous la contrainte $q(x,y) = 1$. (*On pourra montrer que le calcul différentiel conduit en fait à poser un problème algébrique -diagonalisation d'une matrice- que l'on résoudra.*)

4. (8 points) On considère un système linéaire *surdéterminé* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^p$, avec A matrice à p lignes et n colonnes de rang $n < p$ (il y a plus d'équations que d'inconnues, donc en général il n'y a pas de solution, mais la matrice A est supposée de rang maximum n, i.e. l'application linéaire sous-jacente est injective).

Exemple (à traiter en application) : $\left\{\begin{array}{rcr} 2x - y & = & 1 \\ x - 2y & = & -3 \\ x - y & = & 3 \end{array}\right.$ (vérifier qu'il n'y a pas de solution).

... / ...

On se propose de déterminer le vecteur $\overrightarrow{x}$ qui minimise la norme euclidienne $||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||$ (on dit aussi : “qui soit solution de l’équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ au sens des moindres carrés”).

Calculer le gradient de l’application $f : \overrightarrow{x} \mapsto ||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||^2$ (indication : composer l’application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}$ avec l’application $\overrightarrow{y} \mapsto ||\overrightarrow{y}||^2$ pour obtenir que $f'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = 2 < A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}, A\overrightarrow{h} >$, autrement dit que $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}} f} = 2\,{}^tA(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b})$) et en déduire qu’en un point $\overrightarrow{x}$ extrémal (= critique) pour f, on a : ${}^tAA\overrightarrow{x} = {}^tA\overrightarrow{b}$. Montrer que le fait pour A d’être de rang maximum implique que ${}^tAA$ est inversible (indication : d’après l’hypothèse, A est la matrice d’une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, i.e. si $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$; prendre alors $\overrightarrow{u} \in Ker\,{}^tAA$ et montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$: ${}^tAA$ est donc la matrice d’une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, i.e. d’un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$). En déduire que le seul extremum pour f est $\overrightarrow{x} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$. Montrer que la hessienne $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f$ de f est égale pour tout $\overrightarrow{x}$ à $2\,{}^tAA$ (N.B. : remarquer que le gradient de f est affine en la variable $\overrightarrow{x}$). Montrer qu’elle est définie positive en tout $\overrightarrow{x}$ et en déduire que l’extremum local déterminé précédemment est un minimum pour f : c’est la “solution au sens des moindres carrés” cherchée.

Application numérique : calculer la solution au sens des moindres carrés de l’exemple introductif.

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -3x + y + e^{-t} \\ y' & = & x - 3y + e^{-t} + 4 \end{array} \right.$$

Donner la solution générale du système homogène associé. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière de la forme : $x_1(t) = a + be^{-t}, y_1(t) = c + de^{-t}$ (i.e. déterminer a, b, c, d répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = \dfrac{5}{2}, y(0) = \dfrac{11}{2}$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \longrightarrow +\infty$?