UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2001-2002**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

<u>Examen final du 13 février 2002</u>

1. (6 points) a/ On veut déterminer les extrema de $f\,:\,(x,y)\mapsto f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ sur le disque-unité fermé de $\mathbb{R}^2$: $\overline{D}(0,1)=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 1\}$. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que ces extrema existent? Les déterminer par le calcul et donner la valeur de f en ces points.
b/ Mêmes questions en remplaçant $\overline{D}(0,1)$ par $\overline{D}(0,\sqrt{2})=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 2\}$. (*On n'omettra pas d'examiner les valeurs de* $f_{|\overline{D}(0,\sqrt{2})}$ *là où elle n'est pas différentiable, i. e. sur le bord du disque.*)

2. (4 points) Déterminer les axes (direction, longueur) de l'ellipse de centre $O(0,0)$ et d'équation $q(x,y)=2x^2-3xy+2y^2=1$ en cherchant les extrema de la fonction carré de la norme sous la contrainte $q(x,y)=1$. (*On pourra montrer que le calcul différentiel conduit en fait à poser un problème algébrique -diagonalisation d'une matrice- que l'on résoudra.*)

3. (4 points) Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 pour f, et en déduire l'équation du plan tangent à (S) et la position de (S) par rapport à son plan tangent, en chacun des 3 points : $A(1,1,-1)$, $B(-1,-1,-5)$, $C(1,-1,3)$ de (S).

4. (4 points) Montrer que l'équation $f(x,y)=xe^x+ye^y=2e$ (où e est la base des logarithmes népériens) définit au voisinage du point $(1,1)$ une fonction implicite $y=\varphi(x)$ dont on donnera un développement limité à l'ordre 2 en $x-1=t$. Plus généralement, montrer qu'au voisinage de tout point de la courbe (C_{2e}) d'équation $f(x,y)=2e$, on peut définir une fonction implicite, soit de la forme $y=\varphi(x)$, soit de la forme $x=\psi(y)$, dont le graphe s'identifie localement à (C_{2e}). Plus généralement encore, ceci est-il toujours possible en tout point de toute courbe (C_a) de la famille de courbes $\{(C_a),a\in\mathbb{R}\}$ d'équation $f(x,y)=a$?

5. (8 points) Soit $f\ :\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ définie par : $f(\overrightarrow{x})=\dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{x}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}+\overrightarrow{a}$, où $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$. Vérifier que la différentielle de f est donnée par : $f'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h})=\dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{h}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}-\dfrac{<\overrightarrow{x},\overrightarrow{h}>\overrightarrow{x}}{(1+||\overrightarrow{x}||)^2}$ (différentiation des fonctions composées ; on pourra admettre ce résultat) et en déduire l'expression suivante de la matrice jacobienne de f en $\overrightarrow{x}$: $J_{\overrightarrow{x}}f=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\left[I-2\dfrac{\overrightarrow{x}.{}^t\overrightarrow{x}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\right]$.
Chercher les vecteurs propres de l'endomorphisme $f'(\overrightarrow{x})$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\overrightarrow{h}=t\overrightarrow{x}$, où $t\in\mathbb{R}$, d'une part, et $\overrightarrow{h}\in\{\overrightarrow{x}\}^\perp$ d'autre part, et en déduire la diagonalisation de $f'(\overrightarrow{x})$ (on vérifiera que dans la décomposition en somme directe orthogonale : $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\overrightarrow{x}\overset{\perp}{\oplus}\{\overrightarrow{x}\}^\perp$, $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$ est sous-espace propre, associé à la valeur propre $\lambda_1=\dfrac{\frac{1}{2}(1-||\overrightarrow{x}||^2)}{(1+||\overrightarrow{x}||^2)^2}$ et que $\{\overrightarrow{x}\}^\perp$ est aussi sous-espace propre, associé à la valeur propre $\lambda_2=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}$). En utilisant la décomposition orthogonale dans $\mathbb{R}^n$: $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{h_1}+\overrightarrow{h_2}$, où $\overrightarrow{h_1}$ et $\overrightarrow{h_2}$ sont des vecteurs propres (orthogonaux) de $J_{\overrightarrow{x}}f$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, et en développant $\left|\left|J_{\overrightarrow{x}}f.\overrightarrow{h}\right|\right|^2$, montrer que $\left|\left|J_{\overrightarrow{x}}f\right|\right|\leq\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|)$ et en déduire que f est contractante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et que $\forall\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$, l'équation en $\overrightarrow{x}$: $\dfrac{\frac{1}{2}+||\overrightarrow{x}||^2}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}$ a une seule solution dans $\mathbb{R}^n$. Application numérique : en prenant $\overrightarrow{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\ldots+\frac{1}{2}\overrightarrow{e_n}$, proposer un algorithme dans $\mathbb{R}^n$ pour donner une valeur approchée de cette solution.