Examen final du 29 juin (pas de candidats), puis du 24 septembre 2001

1. (6 points) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire admettant pour matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On note X le vecteur-colonne des coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ et on s'autorise dans la suite à identifier $\overrightarrow{x}$ et X. Déterminer $||\varphi|| = \sup\limits_{||\overrightarrow{x}||=1} ||\varphi(\overrightarrow{x})|| = ||A|| = \sup\limits_{||X||=1} ||AX||$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant munis des normes euclidiennes usuelles (on rappelle que $||A||$ est alors la racine carrée de la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$).

Pourquoi la sphère-unité $\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 / ||\overrightarrow{x}|| = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle un compact de $\mathbb{R}^3$?
Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & ||AX|| \end{array}$ est continue.
En déduire qu'il existe nécessairement un X_0 sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^3$ tel que $||AX_0|| = ||A||$.
En exhiber un (prendre un vecteur propre de ${}^tAA$ correspondant à la plus grande des valeurs propres).
Retrouver ce résultat par le calcul différentiel en maximisant $||AX||^2$ sous la contrainte $||X||^2 = 1$.

2. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, espace vectoriel euclidien, définie par :
$\overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto f(\overrightarrow{U}) = \begin{bmatrix} e^{-a}(x\cos b - y \sin b - 1) \\ e^{-a}(x \sin b + y \cos b - 1) \end{bmatrix}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donner par sa matrice jacobienne la différentielle $d_{\overrightarrow{U}} f$ de f en $\overrightarrow{U} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et vérifier qu'elle est indépendante du choix de $\overrightarrow{U}$. Calculer $\left|\left|d_{\overrightarrow{U}} f(\overrightarrow{H})\right|\right|$, pour $\overrightarrow{H} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ et en déduire la norme $\left|\left|d_{\overrightarrow{U}} f\right|\right|$ de l'application linéaire $d_{\overrightarrow{U}} f$.
Montrer que $\forall \overrightarrow{U}, \forall \overrightarrow{V}$, $\left|\left|f(\overrightarrow{U}) - f(\overrightarrow{V})\right|\right| = \left|\left|d_{\overrightarrow{U}} f\right|\right| . \left|\left|\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}\right|\right|$ et en déduire que f est contractante.

(On rappelle que f est contractante ssi $\exists k, 0 < k < 1, \forall \overrightarrow{x}, \forall \overrightarrow{y}, ||f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y})|| \leq k\, ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||$).
On donne la suite $(\overrightarrow{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $\overrightarrow{X_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{X_{n+1}} = f(\overrightarrow{X_n})$. Montrer, à l'aide du théorème du point fixe (cf. feuille n°2, ex. 8.) que la suite $(\overrightarrow{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. (4 points) Soit la quadrique (S) de $\mathbb{R}^3$ (elle admet l'origine $O(0,0,0)$ comme centre de symétrie.), d'équation $Q(X,Y,Z) - 84 = 4X^2 + 6Y^2 + 4Z^2 - 2XY + 2XZ - 2YZ - 84 = 0$
Trouver les axes et les sommets de cette quadrique, i.e. déterminer les points (X_0, Y_0, Z_0) de (S) qui sont extrémaux pour la fonction carré de la norme euclidienne : $X^2 + Y^2 + Z^2$, sous la contrainte $Q(X,Y,Z) - 84 = 0$.

[illegible] tout n-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de nombres positifs ou nuls, et tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (p_i est la probabilité de l'événement i) ; on appelle *entropie d'information* de la probabilité $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ le nombre (positif ou nul) $H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ (dans cette définition, on prolonge par continuité en zéro la fonction $x \mapsto x \ln x$, i.e. en donnant à cette fonction la valeur 0 en 0). Montrer que la probabilité sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui maximise l'entropie d'information est la probabilité *uniforme*, i.e. la probabilité définie par : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_i = \dfrac{1}{n}$. Pourquoi s'agit-il bien d'un maximum ? Quelle(s) probabilité(s) sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ pourrait-on définir pour rendre cette entropie *minimum* ? (On pourra chercher à maximiser -ou à minimiser- la fonction entropie d'information sous la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ dans $\mathbb{R}^n$.)

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -3x + y + e^{-t} \\ y' & = & x - 3y + e^{-t} + 4 \end{array} \right.$$

Donner la solution générale du système homogène associé. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière de la forme : $x_1(t) = a + be^{-t}$, $y_1(t) = c + de^{-t}$ (i.e. déterminer a, b, c, d répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = \dfrac{5}{2}$, $y(0) = \dfrac{11}{2}$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \longrightarrow +\infty$?