UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques **1999-2000**

Examen final (2e session) du 19 septembre 2000

1. (4 points) Extrema de la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

1. (5 points) On définit le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$, noté $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$, comme le vecteur de norme $||\overrightarrow{U}||.||\overrightarrow{V}||.|\sin(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}})|$ et dirigé comme le vecteur $\overrightarrow{w}$, orthogonal à $\overrightarrow{U}$ et à $\overrightarrow{V}$, et tel que $\det(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{w}) > 0$. On peut démontrer que le produit vectoriel a les propriétés suivantes : c'est une application bilinéaire et antisymétrique ($\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U} = -\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; de plus, $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires ; enfin il résulte facilement de sa définition qu'un triangle ABC du plan affine euclidien usuel a une aire ($\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur) égale à $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée convexe de classe C^1 du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, i.e. l'image de l'intervalle $[0,1]$ par une application de classe C^1 $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0)=\gamma(1)$ et telle que la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ soit un convexe. Montrer que parmi les triangles $\gamma(u)\gamma(v)\gamma(w)$ inscrits dans $\mathcal{C}$, il en existe au moins un qui soit d'aire maximum (utiliser les propriétés des fonctions continues sur un compact). Montrer que pour un tel triangle, en chacun de ses sommets, la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle au côté opposé à ce sommet. (*Indication : on pourra pour cela montrer que si* $\overrightarrow{V}(u,v,w) = (\overrightarrow{\gamma(v)}-\overrightarrow{\gamma(u)})\wedge(\overrightarrow{\gamma(w)}-\overrightarrow{\gamma(u)})$, *l'application* $\overrightarrow{V} : [0,1]^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a pour différentielle :*
$\overrightarrow{V}'(u,v,w)(h,k,l) = \overrightarrow{\gamma'(u)} \wedge (\overrightarrow{\gamma(v)} - \overrightarrow{\gamma(w)}).h + \overrightarrow{\gamma'(v)} \wedge (\overrightarrow{\gamma(w)} - \overrightarrow{\gamma(u)}).k + \overrightarrow{\gamma'(w)} \wedge (\overrightarrow{\gamma(u)} - \overrightarrow{\gamma(v)}).l$.)

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle, montrer que les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$ d'aire maximum sont exactement les triangles équilatéraux. (*On rappelle qu'une droite normale à un cercle passe par son centre.*)

3. (5 points) Soit l'application de $F : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(X,t) = (x^2+y^2-t^2, x\sin t - y\cos t)$, où $X = (x,y)$. Calculer la matrice de la dérivée partielle $\left[\frac{\partial F}{\partial X}(X,t)\right]$ et montrer que l'équation $F(X,t) = (0,0)$ définit au voisinage de tout point (X,t) satisfaisant à cette équation, distinct de $(0,0,0)$, dans $\mathbb{R}^3$ une fonction implicite $X = \Phi(t)$ que l'on explicitera en distinguant deux cas, suivant que $\mathrm{Arg}(\frac{x+iy}{t}) - t = 0$ ou π. (*Indication : on utilisera les relations* $x^2+y^2=t^2$ *et* $x\sin t = y\cos t$ *pour montrer que* $X = (t\cos t, t\sin t)$ *ou* $X = (-t\cos t, -t\sin t)$, *et en déduire que, lorsque* $(X,t) \neq (0,0,0)$, *le jacobien* $\left|\frac{\partial F}{\partial X}(X,t)\right|$ *ne s'annule jamais.*)

4. (4 points) Soit le système différentiel non linéaire : $\begin{cases} x' &= 2x - 2xy \\ y' &= -2y + xy \end{cases}$ où $x \geq 0, y \geq 0$.

Déterminer les points d'équilibre de ce système et donner pour chacun de ces points la nature du système linéarisé tangent.

Dans le cas où le point d'équilibre n'est pas l'origine, quelle est la nature des trajectoires du système linéarisé tangent ? (*On pourra démontrer, en prenant pour nouvelles coordonnées* $X = x - x_0, Y = y - y_0$ *autour du point d'équilibre* (x_0,y_0) *que* $XX' + 4YY' = 0$ *et intégrer par rapport au temps cette égalité.*)

5. (6 points) Soit f une application de classe C^1 d'un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que l'équation $f(x) = 0$ ait une solution et une seule dans I.

a/ Montrer que si on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda : x \mapsto g_\lambda(x) = x - \lambda f(x)$ applique I dans lui-même, alors résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans I revient à trouver un point fixe ξ de g_λ dans I. Montrer que si on peut de plus touver λ tel que : $\exists k, 0 < k < 1, \forall x \in I, |g'_\lambda(x)| \leq k$, alors g_λ est contractante de I dans lui-même (on rappelle qu'une partie fermée d'un espace complet est complète), et on peut dans ce cas rechercher le point fixe ξ de g_λ dans I par la méthode des approximations successives, i.e. en définissant une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : x_0 quelconque dans I et $x_{n+1} = g_\lambda(x_n)$, qui converge alors vers ξ.

b/ Application : montrer que l'équation $x^5+x-1=0$ a exactement une solution dans $[0,1]$ et qu'on peut choisir λ de façon que $g_\lambda : x \mapsto g_\lambda(x) = x - \lambda(x^5+x-1)$ applique $[0,1]$ dans lui-même et que $\forall x \in [0,1], |g'_\lambda(x)| \leq k$, pour un $k<1$. En déduire une méthode de résolution approchée de l'équation $x^5+x-1=0$ pour $x \in [0,1]$. (*Indication : montrer d'abord, en écrivant* $g'_\lambda(x) = 1-\lambda-5\lambda x^4$, *que pour obtenir* $\forall x \in [0,1], -k < g'_\lambda(x) < k$ *pour un* k *fixé dans* $]0,1[$, *il suffit de choisir* $1-k \leq \lambda \leq \frac{1+k}{6}$, *ce qui est possible pourvu que* $\frac{5}{7} \leq k < 1$ *:* g_λ *sera ainsi contractante sur* $[0,1]$, *d'après le théorème des accroissements finis ; montrer ensuite -un tel choix de* k *et de* λ *imposant nécessairement* $\lambda > 0$*- en écrivant* $g_\lambda(x) = \lambda+(1-\lambda)x-\lambda x^5$, *que* $0 \leq g_\lambda(x) \leq 1$ *pour tout* x *de* $[0,1]$ *:* g_λ *appliquera ainsi* $[0,1]$ *dans lui-même.*)

c/ (Question subsidiaire **facultative, + 2 points** :) On veut aussi pouvoir choisir λ de façon que la méthode des approximations successives converge le plus vite possible. On rappelle que dans la méthode des approximations successives, pour une application f contractante de rapport k, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe ξ de f avec une vitesse déterminée par la relation : $|x_n-\xi| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|$, c'est-à-dire d'autant plus vite que k est plus petit. Dans le cas de l'application ci-dessus : $g_\lambda(x) = x-\lambda(x^5+x-1)$, il résulte de la question précédente (cf. les indications) que la plus petite valeur possible pour k est $\dfrac{5}{7}$, correspondant à une seule valeur possible pour λ : $\lambda = \dfrac{2}{7}$. On donne : $\left(\frac{5}{7}\right)^{21} = 0.00086$ à 10^{-5} près par excès ; vérifier que si $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = g_{\frac{2}{7}}(x_n)$, alors x_{21} est une valeur approchée à 10^{-3} près de l'unique racine de x^5+x-1 dans l'intervalle $[0,1]$.
