UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques **1999-2000**

Examen final du 29 juin 2000

1. (6 points) On se propose de déterminer les extrema sur le disque-unité fermé $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2+y^2-x^3-y^3$. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que ces extrema existent et sont atteints sur le disque-unité fermé ? Trouver le maximum et le minimum de f sur le disque-unité fermé et les points où ils sont atteints.

(On cherchera les extrema de f sur le disque ouvert $\{x^2+y^2<1\}$ d'une part, et sur le cercle-unité $\left\{(x,\sqrt{1-x^2}),\, -1 \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{(x,-\sqrt{1-x^2}),\, -1 \leq x \leq 1\right\}$ d'autre part.)

2. (8 points) $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa base canonique et de sa structure euclidienne usuelle, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur U, et de gradient ne s'annulant pas sur U.

On note $V = \{\overrightarrow{x} \in U, F(\overrightarrow{x})=0\}$ (V est appelée l'hypersurface de $U \subset \mathbb{R}^n$, d'équation F=0), et pour $\overrightarrow{x} \in V$, $T_{\overrightarrow{x}}V = Ker F'(\overrightarrow{x}) = \left\{\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right\}^{\perp}$ ($T_{\overrightarrow{x}}V$ est appelé l'espace vectoriel tangent à V en $\overrightarrow{x}$).

On note aussi, pour $\overrightarrow{x} \in V$, $\overrightarrow{N}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}}{\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right|\right|}$ (appelé vecteur unitaire normal à V en $\overrightarrow{x}$).

On rappelle que l'application $n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\overrightarrow{x}$ associe $||\overrightarrow{x}||$ est différentiable en tout $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, de différentielle : $\overrightarrow{h} \mapsto \dfrac{<\overrightarrow{h},\overrightarrow{x}>}{||\overrightarrow{x}||}$ $\left(\right.$ ou, autrement dit, de gradient $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}n} = \dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ $\left.\right)$.

On rappelle enfin que la hessienne $\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F$ de F en $\overrightarrow{x}$ est la matrice (symétrique réelle) de la forme bilinéaire symétrique $F''(\overrightarrow{x}) : (\overrightarrow{h},\overrightarrow{k}) \mapsto F''(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h},\overrightarrow{k}) = {}^t\overrightarrow{h}.\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F.\overrightarrow{k}$, qui est elle-même par définition la différentielle en $\overrightarrow{x}$ de l'application $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}$.

a/ Montrer que la différentielle en $\overrightarrow{x}$ de l'application $\overrightarrow{x} \mapsto \left|\left|\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right|\right| = n\left(\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right)$ est donnée par : $\overrightarrow{h} \mapsto <\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F.\overrightarrow{h}, \overrightarrow{N}(\overrightarrow{x})>$.

b/ Différentiant l'identité définissant $\overrightarrow{N}(\overrightarrow{x})$: $\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right|\right|.\overrightarrow{N}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}$, montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in U$, $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = \dfrac{1}{\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right|\right|}\left[\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F.\overrightarrow{h} - \overrightarrow{N}(\overrightarrow{x}).<\overrightarrow{N}(\overrightarrow{x}),\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F.\overrightarrow{h}>\right]$, et que $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})$ a donc pour matrice : $\dfrac{1}{\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}}F}\right|\right|}\left[I - \overrightarrow{N}(\overrightarrow{x}).{}^t\overrightarrow{N}(\overrightarrow{x})\right].\nabla^2_{\overrightarrow{x}}F$.

En déduire que $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})$, endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, applique en fait $\mathbb{R}^n$ dans $T_{\overrightarrow{x}}V$ $\left(\right.$ i.e. montrer que $\forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) \perp \overrightarrow{N}(\overrightarrow{x})$ $\left.\right)$ et que $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})_{|T_{\overrightarrow{x}}V}$ est un endomorphisme symétrique de $T_{\overrightarrow{x}}V$

c/ On rappelle qu'un endomorphisme symétrique réel est toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux.

On appelle par définition *courbures principales* de V en $\overrightarrow{x}$ les valeurs propres de $\overrightarrow{N}'(\overrightarrow{x})_{|T_{\overrightarrow{x}}V}$, et *directions de courbure* les vecteurs propres correspondants. Deux directions de courbure distinctes sont ainsi orthogonales.

Calculer les courbures principales et les directions de courbure de $V = F^{-1}(0)$, surface de $\mathbb{R}^3$, dans les deux cas suivants :

a/ $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$, en $\overrightarrow{x} = (a,0,0)$; b/ $F(x,y,z) = xy - z$, en $\overrightarrow{x} = (0,0,0)$.

(T. S. V. P.)

3. (6 points) Soit le système de 3 équations aux 4 inconnues (t,x,y,z) de $\mathbb{R}^4$: $\left\{\begin{array}{lll} t^3+x^3+y^3+z^3 & = & 8 \\ t^2+x^2+y^2+z^2 & = & 6 \\ t\ +x\ +y\ +z & = & 2 \end{array}\right.$

Vérifier que le point $(t=0,x=-1,y=1,z=2)$ de $\mathbb{R}^4$ est solution. En posant $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et en définissant F de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par : $F(t,\overrightarrow{X}) = \begin{bmatrix} t^3+x^3+y^3+z^3 \\ t^2+x^2+y^2+z^2 \\ t\ +x\ +y\ +z \end{bmatrix}$, montrer que le système admet au voisinage de $(0,-1,1,2)$ une solution résolue en t, i.e. une solution de la forme $(t,x(t),y(t),z(t))$ pour tout t dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Calculer $\overrightarrow{X}'(0) = \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix}$, et écrire un développement limité à l'ordre 1 de $\overrightarrow{X}(t)$ en 0.

Indication : on calculera pour cela la matrice $\dfrac{\partial F}{\partial \overrightarrow{X}}(0,-1,1,2)$ et on utilisera le théorème des fonctions implicites. On montrera en dérivant l'identité $F(t,\overrightarrow{X}(t)) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, valable pour tout t dans un voisinage de 0, que $\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial \overrightarrow{X}} \circ \dfrac{d\overrightarrow{X}}{dt} = \overrightarrow{0}$ pour t dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et on en déduira le calcul explicite de :

$$\overrightarrow{X}'(0) = -\left[\frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{X}}(0,-1,1,2)\right]^{-1} . \left[\frac{\partial F}{\partial t}(0,-1,1,2)\right]$$

4. (4 points) Soit le système différentiel non linéaire dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{array}{lll} x' & = & x^2+y^2-5 \\ y' & = & 2-xy \end{array}\right.$

a/ Déterminer ses points stationnaires (i.e. les (x,y) en lesquels $x'=0$ et $y'=0$).

b/ En notant $F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2-5 \\ 2-xy \end{bmatrix}$ on appelle système linéarisé tangent en (x_0,y_0) au système $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = F(x,y)$ le système $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = J_{(x_0,y_0)}F.\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$, où $J_{(x_0,y_0)}F$ est la jacobienne de F en (x_0,y_0).

Calculer en fonction de (x_0,y_0) les valeurs propres du système linéarisé tangent, i.e. celles de la matrice $J_{(x_0,y_0)}F$, et montrer que lorsque (x_0,y_0) est l'un des points stationnaires déterminés plus haut, (x_0,y_0) est nécessairement soit un *foyer* (i.e. un point où les valeurs propres sont toutes deux imaginaires et de partie réelle non nulle), soit un *point-selle* (i.e. un point où les valeurs propres sont réelles et de signes opposés) du système linéarisé tangent. On précisera suivant les points stationnaires (x_0,y_0) si les foyers trouvés sont attractifs (stables) ou répulsifs (instables).