UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
DEUG MIAS **2003-2004**

Examen partiel du 10 mai 2004

1. (7 points) *(Résolution approchée d'une équation numérique par la méthode des approximations successives de Picard)* Soit à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$, où f est une fonction continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: remarquons d'abord que cette équation est équivalente à l'équation $g_\lambda(x) = x - \lambda f(x) = x$, où λ est un réel non nul quelconque ; supposons ensuite : i/ qu'on connaisse l'existence dans un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ d'une seule solution ξ de cette équation ; ii/ qu'on puisse déterminer λ de façon que g_λ applique I dans I et que $\sup_{x\in I} |g'_\lambda(x)| \leq k < 1$.

a/ Montrer alors, à l'aide de la formule des accroissements finis et du théorème du point fixe pour les applications contractantes, qu'on peut déterminer un algorithme, i.e. une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers le point ξ cherché, la vitesse de convergence étant appréciée par la majoration : $|x_n - \xi| \leq \dfrac{|x_1 - x_0|}{1-k} k^n$.

b/ Application numérique : on cherche ξ tel que $f(\xi) = 0$, où $f(x) = x^5 + x - 1$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $f(0) < 0$, que $f(1) > 0$, et qu'en choisissant $I = [0, 1]$ et $\lambda = \dfrac{1}{6}$, g_λ est contractante de I dans I, avec un rapport de contraction k que l'on déterminera. Sachant de plus que $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{25} = 0.01$ à 10^{-3} près, montrer qu'en partant de $x_0 = 0$, la méthode des approximations successives de Picard (i.e. la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$) donne x_{25} comme approximation de ξ à 1.1×10^{-2} près.

2. (5 points) Donner l'allure de la courbe image de $\gamma : t \mapsto (\cos t, \cos^2 t + \sin^5 t)$ au voisinage de $t = 0$, puis au voisinage de $t = \dfrac{\pi}{2}$, (on pourra faire dans chaque cas un développement limité à l'ordre 4 en $h = 0$ si $t = 0 + h$ ou $t = \dfrac{\pi}{2} + h$).

3. (7 points) Étude de l'arc paramétré $Im(\gamma)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\gamma : t \mapsto \left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right)$: symétries et réduction de l'intervalle d'étude, branches infinies, tangentes verticales et horizontales, tableau de variation et graphe, point double et tangentes au point double.)

4. (5 points) L'hélice circulaire est l'arc paramétré $Im(\gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ où $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ (elle décrit l'enroulement d'un fil autour d'une bobine cylindrique infinie à raison d'une unité de longueur en hauteur par tour). On note $\overrightarrow{\tau(t)} = \dfrac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{\left\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\right\|}$, $\overrightarrow{\nu(t)} = \dfrac{\overrightarrow{\gamma''(t)} - < \overrightarrow{\gamma''(t)}, \overrightarrow{\tau(t)} > \overrightarrow{\tau(t)}}{\left\|\overrightarrow{\gamma''(t)} - < \overrightarrow{\gamma''(t)}, \overrightarrow{\tau(t)} > \overrightarrow{\tau(t)}\right\|}$ et $\overrightarrow{\beta(t)} = \overrightarrow{\tau(t)} \wedge \overrightarrow{\nu(t)}$

(N.B. : $\overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}$ et $\overrightarrow{\beta(t)}$ sont les vecteurs unitaires tangent, normal et binormal à la courbe $Im(\gamma)$ en $\overrightarrow{\gamma(t)}$ et $\left(\overrightarrow{\gamma(t)}, \overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\right)$ est le trièdre de Serret-Frénet attaché à la courbe $Im(\gamma)$ en $\overrightarrow{\gamma(t)}$)

Calculer explicitement $\overrightarrow{\tau(t)}$, $\overrightarrow{\nu(t)}$ et $\overrightarrow{\beta(t)}$. Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left\{\overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\right\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

On note $Q(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t & -\cos t & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\sin t & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Pourquoi sait-on a priori que $Q(t)$ est pour tout t une matrice orthogonale ? Le retrouver par un calcul direct.