UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
DEUG MIAS **2001-2002**

Examen partiel du 30 avril 2002

1. (6 points) *On rappelle que : a/ tout sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *peut s'écrire comme une intersection de noyaux de formes linéaires ; b/ l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert ; c/ l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.*
(N. B. : les trois questions **1.1.**, **1.2.** et **1.3 .** qui suivent sont indépendantes.)

1.1. Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est fermé. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel et $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à F, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \bigcap F = \emptyset$.

1.2. Soit $(\overrightarrow{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que : a/ $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall k \in \mathbb{N}\ , < \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{v} >= 0$; b/ $\forall k \in \mathbb{N}\ , \forall l \geq k\ , ||\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_l}|| < 2^{-k}$. Montrer que $(\overrightarrow{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers un $\overrightarrow{\xi}$ tel que $< \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{v} >= 0$.

1.3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, k un réel, et $E_{f,k} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\overrightarrow{x}) > k\}$. Montrer que $E_{f,k}$ est ouvert ; en déduire que si $f(\overrightarrow{x}) > k$, alors $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \overrightarrow{y} \in B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)\, , f(\overrightarrow{y}) > k$.

2. (6 points) Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Calculer $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma''(t)}$; on pose $\overrightarrow{\tau(t)} = \dfrac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{||\overrightarrow{\gamma'(t)}||}$, $\overrightarrow{\nu(t)} = \overrightarrow{\gamma''(t)}$ et $\overrightarrow{\beta(t)} = \overrightarrow{\tau(t)} \wedge \overrightarrow{\nu(t)}$; montrer que $\left\{\overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (le repère orthonormé $\left(\gamma(t), \overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\right)$ est appelé “repère mobile en $\gamma(t)$”).

Donner des équations de la tangente en $\gamma(t)$ à la courbe image Im(γ). On considère l'intersection de cette tangente avec le plan $\{z = 0\}$: elle décrit, lorsque t varie, une courbe plane. Donner une paramétrisation $x = x(t), y = y(t)$ de cette courbe et étudier son allure au voisinage de $t = 0$.

3. (6 points) *On rappelle que* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ , \ \forall t \in \mathbb{R}$, *on définit :*

$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \overset{def}{=} \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{N} t^k \frac{A^k}{k!}$ *et que* $e^{A+B} = e^A e^B$ *pour toutes matrices* A *et* B.

3.1. Que vaut e^0 ? (où O est la matrice nulle)

3.2. Montrer que $e_A : t \mapsto e^{tA}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ dérivable en $t = 0$, de dérivée A, i.e. $e'_A(0) = A$. Pour cela on montrera (ou on admettra) que $e^{tA} - I - tA = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{k=2}^{N} t^k \frac{A^k}{k!}$ est un $o(t)$ en majorant, pour tout N, $||t^2 A^2 \sum_{k=0}^{N} t^k \frac{A^k}{(k+2)!}||$ par $t^2 ||A^2|| e^{||A||}$ pour $|t| \leq 1$.

3.3. En déduire que e_A est dérivable en tout t de $\mathbb{R}$, de dérivée $e'_A(t) = Ae^{tA}$.

3.4. En déduire que $\forall \overrightarrow{Z} \in \mathbb{R}^n$, l'application $X : t \mapsto e^{tA}\overrightarrow{Z}$ est dérivable et satisfait pour tout t l'équation différentielle : $\overrightarrow{X'(t)} = A.\overrightarrow{X(t)}$, avec la condition initiale en 0 : $\overrightarrow{X(0)} = \overrightarrow{Z}$.

4. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 1 + xe^{-x}$. Variations et graphe sommaire de f. Montrer que f applique l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même. Montrer, à l'aide de la formule des accroissements finis, que f est contractante de l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même.

En déduire, à l'aide du théorème du point fixe, l'existence d'un unique $\xi \in [1, 2]$ tel que $1 + \xi e^{-\xi} = \xi$.

En donner un algorithme de calcul approché à l'aide d'une suite définie par une relation de récurrence.

5. (4 points) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Montrer sans calculs que l'application : $\overrightarrow{x} \mapsto ||\varphi(\overrightarrow{x})||^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est bornée -et atteint ses bornes- sur le cercle-unité $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Déterminer (par le calcul) ces bornes en paramétrant le cercle-unité par $\{x = \cos\theta, y = \sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[\}$ (*on pourra montrer que* $||\varphi(\overrightarrow{x})||^2 = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$).

<u>Corrigé de l'examen partiel du 30 avril 2002</u>

1.1. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une intersection d'hyperplans (voir le cours) ; or tout hyperplan est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque de $\{0\}$ -fermé dans $\mathbb{R}$- par une forme linéaire, i.e. une application linéaire, donc continue, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Comme une intersection de fermés est un fermé, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est bien un fermé. Il en résulte que si F est un sous-espace vectoriel, son complémentaire F^c est ouvert : donc si $\overrightarrow{x} \in F^c$, il existe une boule $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ de centre $\overrightarrow{x}$ entièrement contenue dans F^c, ce qui est exactement dire que $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \bigcap F = \emptyset$.

1.2. Tout d'abord, la suite $(\overrightarrow{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de l'hyperplan $\overrightarrow{v}^{\perp}$, qui est d'après ce qui précède un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{R}^n$; de plus cette suite est clairement de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, soit N le premier entier tel que $2^{-N} \leq \varepsilon$; alors d'après les hypothèses faites sur la suite $(\overrightarrow{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\forall k \geq N, \forall l \geq N,\ ||\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_l}|| < \varepsilon$. Comme elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$, elle converge, et comme $\overrightarrow{v}^{\perp}$ est fermé, elle converge dans $\overrightarrow{v}^{\perp}$: donc sa limite $\overrightarrow{\xi}$ est bien dans $\overrightarrow{v}^{\perp}$, i.e. telle que $< \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{v} >= 0$.

1.3. $E_{f,k} = f^{-1}\left(]k, +\infty[\right)$, image réciproque d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donc $\forall \overrightarrow{x} \in E_{f,k}$, $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \overrightarrow{y} \in B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)\,,\ \overrightarrow{y} \in E_{f,k}$, ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer.

2. Des calculs immédiats donnent : $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\gamma''(t)} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\tau(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\nu(t)} = \overrightarrow{\gamma''(t)} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\beta(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{bmatrix}$. On a : $< \overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)} >= 0$: comme $\overrightarrow{\tau(t)}$ et $\overrightarrow{\nu(t)}$ sont orthogonaux (et donc leur sinus est égal à 1) et de norme 1, $\overrightarrow{\beta(t)} = \overrightarrow{\tau(t)} \wedge \overrightarrow{\nu(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\tau(t)}$ et $\overrightarrow{\nu(t)}$, et de norme 1. Il en résulte que le repère $\left(\gamma(t), \overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\right)$ est un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$.

Un point $M(x,y,z)$ est sur la tangente en $\gamma(t)$ à la courbe image $Im(\gamma)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{\gamma(t)} = \begin{bmatrix} x - \cos t \\ y - \sin t \\ z - t \end{bmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement si (deux équations suffisent) : $x - \cos t = -(z-t)\sin t$ et $y - \sin t = (z-t)\cos t$, d'où en faisant $z = 0$ dans ces équations une paramétrisation de l'intersection cherchée de la tangente avec le plan $\{z = 0\}$: $x = x(t) = \cos t + t\sin t,\ y = y(t) = \sin t - t\cos t$. Soit $c(t)$ le point $(x(t),\, y(t))$. On calcule : $\overrightarrow{c'(t)} = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{c''(t)} = \begin{bmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{c'''(t)} = \begin{bmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \end{bmatrix}$, d'où en $t = 0$: $\overrightarrow{c'(0)} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{c''(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{c'''(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. On a ici $p = 2,\ q = 3$: la courbe $Im(c)$ admet donc en $t = 0$ un point de rebroussement de première espèce (la courbe $Im(c)$ s'appelle une *développante de cercle*).

3.1. $e^0 = I$, puisque $A^0 = I$ est le seul terme non nul dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}$ lorsqu'on fait $t = 0$.

3.2. On a bien $e^{tA} - I - tA = \lim\limits_{N\longrightarrow\infty}\sum\limits_{k=2}^{N} t^k\dfrac{A^k}{k!} = \lim\limits_{N\longrightarrow\infty} t^2A^2\sum\limits_{k=0}^{N-2} t^k\dfrac{A^k}{(k+2)!}$; or pour tout N, $\left|\left|t^2A^2\sum\limits_{k=0}^{N-2} t^k\dfrac{A^k}{(k+2)!}\right|\right| \leq t^2||A||^2\sum\limits_{k=0}^{N-2}|t|^k\dfrac{||A||^k}{(k+2)!} \leq t^2||A||^2\sum\limits_{k=0}^{N-2}|t|^k\dfrac{||A||^k}{k!} \leq t^2||A||^2\sum\limits_{k=0}^{+\infty}|t|^k\dfrac{||A||^k}{k!}$ $= t^2||A||^2e^{|t|||A||} \leq t^2||A||^2e^{||A||}$ (pour $|t| \leq 1$) est un $o(t)$, donc $\forall N$, $\left|\left|t^2A^2\sum\limits_{k=0}^{N-2} t^k\dfrac{A^k}{(k+2)!}\right|\right| = o(t)$, et ceci reste vrai en passant à la limite lorsque $N \longrightarrow +\infty$, i.e. $||e^{tA} - I - tA|| = o(t)$, ou encore $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\left|\left|\dfrac{e^{tA}-e^0}{t} - A\right|\right| = 0$, ce qui est exactement dire que l'application e_A est dérivable en $t = 0$, de dérivée $e'_A(0) = A$.

3.3. On en déduit que $e'_A(t) = \lim\limits_{s\longrightarrow 0}\dfrac{e^{(s+t)A} - e^{tA}}{s} = \left(\lim\limits_{s\longrightarrow 0}\dfrac{e^{sA}-e^0}{s}\right).e^{tA} = A.e^{tA}$, donc e_A est bien dérivable en tout t, de dérivée $e'_A : t \mapsto A.e^{tA}$.

3.4. Il en résulte que $\forall\overrightarrow{Z} \in \mathbb{R}^n$, l'application $X : t \mapsto \overrightarrow{X(t)} = e_A(t).\overrightarrow{Z}$, qui a pour dérivée l'application $X' : t \mapsto \overrightarrow{X'(t)} = A.e_A(t).\overrightarrow{Z} = A.\overrightarrow{X(t)}$, satisfait donc bien pour tout t l'équation différentielle $\overrightarrow{X'(t)} = A.\overrightarrow{X(t)}$, avec de plus la condition initiale en 0 : $\overrightarrow{X(0)} = e^0.\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{Z}$.

4. On a $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, d'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	1

Un graphe sommaire s'en déduit immédiatement, qu'on peut préciser en remarquant qu'il admet un unique point d'inflexion en $x = 2$, puisque $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Comme f est décroissante sur $[1,2]$, avec $f(1) = 1 + \dfrac{1}{e} \in [1,2]$ et $f(2) = 1 + \dfrac{2}{e^2} \in [1,2]$, f applique bien $[1,2]$ dans lui-même ; comme $f'(1) = 0$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{e^2} \in [-1,0]$, avec f' décroissante sur $[1,2]$, on obtient que $|f'(x)|$ est majorée par $\dfrac{1}{e^2} < 1$ pour $x \in [1,2]$, donc, d'après la formule des accroissements finis, que $\forall x \in [1,2]$, $\forall y \in [1,2]$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{e^2}|x-y|$, i.e. que f est contractante de rapport $\dfrac{1}{e^2}$ sur l'intervalle fermé $[1,2]$. Il en résulte, d'après le théorème du point fixe, l'existence d'un unique point fixe ξ de f dans $[1,2]$, i.e. $\xi \in [1,2]$ tel que $1 + \xi e^{-\xi} = \xi$. Un algorithme de calcul de ξ consiste à prendre par exemple $x_0 = 1$ et à définir par la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$ la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dont ξ est la limite (on peut démontrer par exemple que x_{10} est une valeur approchée de ξ à 10^{-4} près).

5. La forme quadratique $||\varphi||^2 : \overrightarrow{x} \mapsto ||\varphi(\overrightarrow{x})||^2 = (x+2y)^2 + y^2$ (si $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par exemple comme composée d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par l'application $\overrightarrow{x} \mapsto ||\overrightarrow{x}||^2$, et le cercle-unité de $\mathbb{R}^2$ est un compact (fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application $\overrightarrow{x} \mapsto ||\overrightarrow{x}||^2$, et borné), donc elle est bornée et atteint ses bornes sur le cercle-unité. Avec $x = \cos\theta, y = \sin\theta$, on obtient : $||\varphi(\overrightarrow{x})||^2 = (x+2y)^2 + y^2 = \cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta + \sin^2\theta =$ $1 + 4\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta = 3 - 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 3 + 2(\sin 2\theta - \cos 2\theta) = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Il en résulte, le sinus prenant toutes les valeurs possibles entre -1 et 1, que les bornes cherchées sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ (ce qui pour $\overrightarrow{x} \mapsto ||\varphi(\overrightarrow{x})||$, correspond à $-1 + \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$).