UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
DEUG MIAS **2000-2001**

Examen partiel du 9 juin 2001

1. (6 points) Étudier la courbe paramétrée plane définie par : $x(t) = \dfrac{(t-1)^2}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{t(t-1)^2}{t^2+1}$ (tableau de variation, points stationnaires et tangentes en ces points, branches infinies, intersections avec les axes de coordonnées et tangentes en ces points, points à tangente horizontale et points à tangente verticale, tracé).

2. (8 points) On considère l'arche de cycloïde $\{\gamma(t)(t - \sin t, 1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$.
Calculer $s(t)$, longueur de l'arc $\gamma([0,t])$, et en déduire la longueur totale de l'arche $s(2\pi)$.
Donner le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\tau}$ et sa dérivée $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ par rapport à l'abscisse curviligne s.
En déduire : a/ les coordonnées du repère mobile $(M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu})$ au point $M(t)(t - \sin t, 1 - \cos t)$; b/ la courbure en $M(t)$; c/ les coordonnées du centre de courbure $\Omega(t)$ en $M(t)$ et une paramétrisation de la développée de l'arche de cycloïde. Retrouver ce dernier résultat en calculant l'enveloppe des normales.
Montrer que $\overrightarrow{OM(t+\pi)} + \begin{bmatrix} -\pi \\ -2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{O\Omega(t)}$ et $\overrightarrow{OM(t-\pi)} + \begin{bmatrix} \pi \\ -2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{O\Omega(t)}$. En déduire à l'aide de translations une construction de l'arc de développée $\{\Omega(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$ à partir des deux demi-arches de cycloïde $\{M(t)(t - \sin t, 1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq \pi\}$ et $\{M(t)(t - \sin t, 1 - \cos t),\ \pi \leq t \leq 2\pi\}$. Représenter sur un même dessin l'arche de cycloïde et sa développée.

3. (8 points) Soit $f(x,y) = k$ l'équation d'une courbe de $\mathbb{R}^2$, k étant une constante réelle et f étant de classe C^1, admettant la paramétrisation C^1 $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = M(t)(x(t), y(t))$. (N.B. : donc $\forall t \in I, f(x(t), y(t)) = k$.). Montrer en dérivant $f \circ \gamma$ que le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla_{M(t)} f}$ est en tout point $M(t)$ de la courbe orthogonal au vecteur tangent $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.
On considère à présent la courbe d'équation $f(x,y) = k$ comme une ligne de niveau sur la surface $(S) = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = z\}$, et on se propose de déterminer en chaque point M de (S) dans quelle direction $\overrightarrow{v}$ la pente ascendante, i.e. la croissance de la cote z est la plus forte. En posant $M(x,y) = M_0(x_0, y_0) + t\overrightarrow{v}$, écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en t pour f entre M_0 et M. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (indication : quand a-t-on l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?...), qu'en tout point M_0, la direction cherchée est celle du gradient $\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}$, et que la pente ascendante maximale ne peut être atteinte qu'en un point M_0 tel que $\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{M_0} f}\right|\right|^2$ soit maximum.
Application numérique : $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, avec $a > b > 0$: les courbes de niveau $\{f(x,y) = k\}$, définies pour $k \geq 0$, sont des ellipses concentriques. Montrer que pour tout k la courbe de niveau $\{f(x,y) = k\}$ de $\mathbb{R}^2$ est un compact et que $\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{M(x,y)} f}\right|\right|^2$ est une fonction continue de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pourquoi est-on certain, sans calculs, qu'il existe au moins un point de chaque ellipse où la pente ascendante est maximale ? Montrer en exprimant $\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{M(x,y)} f}\right|\right|^2$ en fonction de $x \in \left[-a\sqrt{k}, a\sqrt{k}\right]$ (N.B. : utiliser la relation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k$ entre x et y), que, pour chaque ellipse, les points de plus forte pente sont exactement les périgées (points d'abscisse nulle).

Montrer de même en exprimant $\left|\left|\overrightarrow{\nabla_{M(x,y)} f}\right|\right|^2$ en fonction de $y \in \left[-b\sqrt{k}, b\sqrt{k}\right]$ que la ligne suivant laquelle la pente est la plus douce est la ligne (c'est une parabole) des apogées $\{y = 0,\ z = \dfrac{x^2}{a^2}\}$.