UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
DEUG MIAS **2001-2002**

Examen final (2e session) du 19 septembre 2002

1. (6 points) On donne la courbe paramétrée plane : $x(t) = t - \mathrm{th}t,\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}t}$. (On rappelle que les fonctions hyperboliques élémentaires sont : $\mathrm{ch}t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2},\quad \mathrm{sh}t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2},\quad \mathrm{th}t = \dfrac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}$, que $\mathrm{ch}^2t - \mathrm{sh}^2t = 1$, et que $(\mathrm{ch}t)' = \mathrm{sh}t,\quad (\mathrm{sh}t)' = \mathrm{ch}t,\quad (\mathrm{th}t)' = 1 - \mathrm{th}^2t = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2t}$.) Étudier cette courbe : éléments de symétrie, points singuliers [N.B. : on pourra utiliser en $t = 0$ les développements limités : $\mathrm{th}t = t - \dfrac{t^3}{3} + o(t^3),\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}t} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$], branches infinies, tableau de variations, tracé.

Donner une paramétrisation de sa développée (en calculant le point caractéristique de la normale) et tracer cette développée (N. B. : c'est la courbe d'équation $y = \mathrm{ch}x$) .

2. (5 points) Repère mobile $\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}\}$, rayon de courbure et équation du cercle osculateur en un point quelconque M de la spirale logarithmique : $x = e^t \cos t,\quad y = e^t \sin t$. En déduire une paramétrisation de la développée. Quel rapport géométrique simple existe-t-il entre la courbe d'origine et sa développée ?

3. (5 points) Extrema dans $\mathbb{R}^2$ de f définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2(x - y)^2 - 4x - 4y$. (On pourra vérifier que la condition $\overrightarrow{\nabla_{x,y} f} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, et que d'autre part $x^2 + xy + y^2 > 0$ quels que soient x et y non nuls.)

4. (6 points) Soit (Γ) la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par l'intersection des deux surfaces :
$(S) = \{M(x, y, z)/F(x, y, z) = xy - z = 0\}$ et $(S') = \{M(x, y, z)/G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

En un point quelconque $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de (Γ), donner des équations des plans affines $M_0 + T_{M_0}S$ tangent à (S) et $M_0 + T_{M_0}S'$ tangent à (S').

On rappelle que ces plans ont pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{\nabla_{M_0} F}$ et $\overrightarrow{\nabla_{M_0} G}$, et que donc un vecteur tangent à (Γ), qui est à la fois tangent à (S) et à (S'), est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{\nabla_{M_0} F}$ et à $\overrightarrow{\nabla_{M_0} G}$. En déduire que la tangente $T_{M_0}\Gamma$ à (Γ) en M_0 est dirigée par le produit vectoriel $\overrightarrow{\nabla_{M_0} F} \wedge \overrightarrow{\nabla_{M_0} G}$, que l'on calculera ; ceci n'est bien sûr possible que si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (i.e. que si les plans tangents $T_{M_0}S$ et $T_{M_0}S'$ ne sont pas confondus) : vérifier que ce n'est ici jamais le cas, et que ce produit vectoriel définit bien toujours une direction de droite.

En utilisant la paramétrisation par cosinus et sinus du cercle-unité, montrer que (Γ) admet pour paramétrisation $(x = \cos t, y = \sin t, z = \frac{1}{2} \sin 2t)$ et retrouver l'expression du vecteur tangent à (Γ).

Pourquoi (Γ) est-elle un compact de $\mathbb{R}^3$? (On pourra donner au moins deux arguments distincts.)

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -5x - 3y + 4e^{-t} + 6 \\ y' &=& -3x - 5y + 3e^{-t} + 2 \end{array} \right.$$

Donner la solution générale du système homogène associé. On pourra pour cela vérifier que

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et en déduire l'expression de $\exp\left(t \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\right)$. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière de la forme : $x_1(t) = a + be^{-t}, y_1(t) = c + de^{-t}$ (i.e. déterminer a, b, c, d répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = 2, y(0) = 1$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \longrightarrow +\infty$?