UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
DEUG MIAS **2001-02**

Examen final du 28 juin 2002

1. (5 points) Étudier la courbe paramétrée plane : $x(t) = t - t^3$, $y(t) = 1 - t^2$ (éléments de symétrie, branches infinies, point double (indication : $t = \pm 1$) et tangentes au point double, tableau de variations, points à tangente horizontale et points à tangente verticale, tracé sommaire).

2. (6 points) Soit γ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dfinie par $\overrightarrow{\gamma(t)} = \begin{bmatrix} t + \sin t - 4\sin\dfrac{t}{2} \\ 3 + \cos t - 4\cos\dfrac{t}{2} \end{bmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{bmatrix} -2\cos\dfrac{t}{2}\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right) \\ 2\sin\dfrac{t}{2}\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right) \end{bmatrix}$ et en déduire le calcul de la longueur $s(t)$ de l'arc de courbe $\gamma([0,t])$. Donner les vecteurs unitaires tangent $\overrightarrow{\tau}$ et normal $\overrightarrow{\nu}$ à la courbe $Im(\gamma)$ au point $M(t)$ défini par $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{\gamma(t)}$. Calculer la courbure K_t et le rayon de courbure R_t en $M(t)$ à $Im(\gamma)$ et donner les coordonnées du centre de courbure $\Omega(t)$ en $M(t)$ sur $Im(\gamma)$. Montrer que la développée de $Im(\gamma)$ (c'est-à-dire l'ensemble des $\Omega(t)$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$) admet un point de rebroussement de première espèce en tout $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. (4 points) Déterminer les extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3$.

4. (4 points) Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Donner l'équation du plan affine T tangent à S et la position de S par rapport à T en chacun des points $(1,1,2)$ et $(1,0,-1)$.

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 1 \\ y' &= x - 3y + 5 \end{cases}$$

Donner la solution générale du système homogène associé. On pourra pour cela vérifier que

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et en déduire l'expression de $\exp\left(t\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)$. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière constante (i.e. un point stationnaire) que l'on déterminera. En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = -1, y(0) = 1$.