Examen final (2^{e} session) du 24 septembre 2001

1. (5 points) On donne la courbe paramétrée plane : $x(t) = \tan t + \sin t,\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t}$ (N.B. : la paramétrisation étant périodique de période 2π, on pourra limiter l'étude à l'intervalle $[0, 2\pi[$) : on se contentera de déterminer a/ les points stationnaires et l'allure de la courbe au voisinage des points stationnaires ; b/ les branches infinies (asymptotes et position de la courbe par rapport aux asymptotes). Tableau de variation et tracé sont facultatifs.

2. (5 points) (*Développée de la spirale logarithmique*) On donne la courbe paramétrée plane : $x(t) = e^t \cos t, y(t) = e^t \sin t$. Quelle est la limite du point $M(t)\ (x(t), y(t))$ pour $t \longrightarrow -\infty$? Que se passe-t-il pour $t \longrightarrow +\infty$? Donner une paramétrisation de la développée de cette courbe (on pourra déterminer le point caractéristique de sa normale) et montrer que c'est une autre spirale logarithmique, déduite de la précédente par rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'origine.

3. (5 points) Extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$? (On pourra vérifier que la condition $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{0}$ s'écrit encore : $\begin{cases} x^3 + y^3 &= 0 \qquad (\text{et donc } x + y = 0) \\ x^3 &= x - y \end{cases}$ et en déduire que f a exactement 3 points critiques, que l'on étudiera.)

4. (5 points) Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^2$. Déterminer les points critiques de f, écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour f en chacun de ces points et en déduire les extrema de f dans $\mathbb{R}^2$. On considère la surface (S) de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$: donner l'équation du plan tangent à (S) en chacun des points $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, où (x_0, y_0) est un point critique pour f, et donner dans chaque cas la position de (S) par rapport à son plan tangent (au-dessus ? au-dessous ? ou le traversant ?).

5. (5 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 1 \\ y' &= 2x - 4y + 6 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet une solution particulière constante (i.e. un point singulier du système). Donner la solution générale du système homogène associé. En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = 7$, $y(0) = 5$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \longrightarrow +\infty$?