## Examen final du 29 juin 2001

**1. (8 points)** Étudier la courbe paramétrée plane : $x(t) = \dfrac{(1+t)(1-t^2)}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{(1-t)(1-t^2)}{1+t^2}$ : éléments de symétrie (vérifier que $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$ et en déduire que la première bissectrice est axe de symétrie pour la courbe), tableau de variations (N.B. : on notera $\alpha$ la seule racine réelle -elle est comprise entre $0$ et $1$- du polynôme $1 - 5t + t^2 - t^3$), branches infinies (existence d'une asymptote oblique), point double (indication : $t = \pm 1$) et tangentes au point double, intersections avec l'axe de symétrie et tangentes en ces points, tracé.

**2. (4 points)** Développée de l'hyperbole équilatère : $x^2 - y^2 = 1$ (on pourra utiliser la paramétrisation : $x = \mathrm{ch}t, y = \mathrm{sh}t$). Donner les coordonnées du centre de courbure de l'hyperbole en son sommet (= l'un de ses deux sommets) ($x = 1, y = 0$) et vérifier que c'est un point de rebroussement de la développée. Quel est le comportement à l'infini de la développée ? (i.e. que peut-on dire de ses branches infinies ?)

**3. (4 points)** Déterminer les extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f$ définie par $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$. (On vérifiera que la condition $\overrightarrow{\nabla_{x,y} f} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $x - y = x^3$ et $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ ; pour l'étude en $(0,0)$, on pourra montrer que pour $x$ non nul mais voisin de $0$, on a $f(x,x) > 0$, mais $f(x,-x) < 0$.)

**4. (4 points)** Soit $(\Gamma)$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par l'intersection des deux surfaces :
$(S) = \{(X,Y,Z)/F(X,Y,Z) = XY - Z = 0\}$ et $(S') = \{(X,Y,Z)/G(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - 1 = 0\}$.

En un point quelconque $M(X,Y,Z)$ de $(\Gamma)$, donner les équations des plans affines tangents $M + T_M S$ à $(S)$ et $M + T_M S'$ à $(S')$.

On rappelle que ces plans ont pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{\nabla_M F}$ et $\overrightarrow{\nabla_M G}$, et que donc un vecteur tangent à $(\Gamma)$, qui est à la fois tangent à $(S)$ et à $(S')$, est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{\nabla_M F}$ et à $\overrightarrow{\nabla_M G}$. En déduire que la tangente $T_M\Gamma$ à $(\Gamma)$ en M est dirigée par le produit vectoriel $\overrightarrow{\nabla_M F} \wedge \overrightarrow{\nabla_M G}$, que l'on calculera ; ceci n'est bien sûr possible que si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (i.e. que si les plans tangents $T_M S$ et $T_M S'$ ne sont pas confondus) : vérifier que ce n'est ici jamais le cas, et que ce produit vectoriel définit bien toujours une direction de droite.

En utilisant la paramétrisation par cosinus et sinus du cercle-unité, montrer que $(\Gamma)$ admet pour paramétrisation $(x = \cos t, y = \sin t, z = \frac{1}{2}\sin 2t)$ et retrouver l'expression du vecteur tangent à $(\Gamma)$.

**5. (6 points)** Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + e^{-t} \\ y' &= x - 3y + e^{-t} + 4 \end{cases}$$

Donner la solution générale du système homogène associé. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière de la forme : $x_1(t) = a + be^{-t}, y_1(t) = c + de^{-t}$ (i.e. déterminer $a$ et $b$ répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = \dfrac{5}{2}$, $y(0) = \dfrac{11}{2}$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \longrightarrow +\infty$?