UNIVERSITÉ PARIS VIII **Algèbre linéaire I**
DEUG LIT **1998-99**

Examen partiel du 17 décembre 1998

1. (2 points) Dans $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, anneau des classes résiduelles modulo 5, donner la table de l'addition et celle de la multiplication ; peut-on décider au vu de ces tables si $\mathbb{F}_5$ est un corps ?

2. (4 points) Soit F l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 qui s'annulent en 0 et en 1 :
$F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^{\text{o}}P \leq 3,\ P(0) = 0,\ P(1) = 0\}$.
a/ Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b/ Montrer que tout vecteur de F est un polynôme de la forme $a_1X + a_2X^2 - (a_1 + a_2)X^3$, et en déduire que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est un système générateur de F .
c/ Montrer que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est en fait une base de F, et en déduire la dimension de F.

3. (4 points) Montrer que le système de vecteurs $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$ et calculer les coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ dans cette base.

4. (8 points) a/ Soient dans $E = \mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Montrer que $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer dans cette base les coordonnées de $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix}-5\\2\\-1\end{bmatrix}$.

b/ Soient $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$\varphi(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}, \varphi(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{w}$. Déterminer les coordonnées de $\varphi(\overrightarrow{x})$:

- d'abord dans la base canonique $\left\{\overrightarrow{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$;
- puis dans la base $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

c/ Vérifier que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$; en déduire que $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \in Ker\varphi$.
d/ Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de $Im\varphi$; en déduire la dimension de $Ker\varphi$ et en donner une base (on rappelle que $rg(\varphi) = \dim E - \dim Ker\varphi$).

5. (6 points) Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré ≤ 4 ; en donner une base et la dimension. On considère dans E les vecteurs : X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$, $X(X-1)(X-2)(X-3)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? On notera V le sous-espace vectoriel de E qu'ils engendrent. Quelle est sa dimension ?
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(P) = P(0)$. Montrer que φ est surjective, et donc de rang 1 (indication : les polynômes constants font partie de E); quelle est la dimension de $Ker\varphi$?

Corrigé de l'examen partiel d'algebre linéaire du 17 décembre 1998

1. Les tables demandées sont :

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

et

×	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

On constate sur ces tables que, en admettant l'associativité des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{F}_5$, que ($\mathbb{F}_5$, +) est un groupe commutatif (élément neutre $\overline{0}$) et que ($\mathbb{F}_5^*$, $\times$) est également un groupe commutatif (élément neutre $\overline{1}$), puisque tout élément non nul a un inverse : $\overline{1}\times\overline{1}=\overline{1}$, $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{1}$, $\overline{3}\times\overline{2}=\overline{1}$, $\overline{4}\times\overline{4}=\overline{1}$. Il resterait donc encore à vérifier que les lois $+$ et $\times$ sont associatives, et $\times$ distributive sur $+$ (ce qui résulte de ces propriétés pour $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Z}$) pour obtenir que $\mathbb{F}_5$ est bien un corps, d'ailleurs commutatif.

2. a/ Soient P et Q des vecteurs (polynômes) de F, et soient λ et μ des réels quelconques. Il faut vérifier que $\lambda P + \mu Q$ sont aussi dans F. D'abord (avec la convention $d^o 0 = -\infty$), $d^o\lambda P \leq d^o P \leq 3$, $d^o\mu Q \leq d^o Q \leq 3$, et $d^o(\lambda P+\mu Q) \leq \max(d^o p, d^o Q) \leq 3$; ensuite $(\lambda P+\mu Q)(0) = \lambda P(0)+\mu Q(0) = 0$ et $(\lambda P+\mu Q)(1) = \lambda P(1)+\mu Q(1) = 0$, donc $\lambda P+\mu Q$ est bien un élément de F. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et donc bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b/ Tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 réels quelconques ; si $P \in F$, on a de plus : $P(0) = 0$ et $P(1) = 0$, soit $a_0 = 0$ et $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, soit encore $P = a_1X + a_2X^2 - (a_1 + a_2)X^3 = a_1(X - X^2) + a_2(X^2 - X^3)$, avec a_1 et a_2 quelconques : F est donc l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de $X - X^3$ et $X^2 - X^3$. Ces deux polynômes forment donc bien un système générateur de F.
c/ Pour montrer que $\{X - X^3,\ X^2 - X^3\}$ est une base de F, il suffit donc de montrer que c'est un système libre. Or si $\lambda(X - X^3) + \mu(X^2 - X^3) = 0$, en faisant $X = -1$, on obtient $2\mu = 0$, et en faisant par exemple $X = 2$, $-6\lambda - 4\mu = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$: $\{X - X^3,\ X^2 - X^3\}$ est donc bien une base de F, qui est ainsi de dimension 2.

3. Il suffit de montrer que le système est de rang 4 ; or

$$rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\-4\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)$$

$$=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\0\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}\right) = 4$$ car ce dernier système est échelonné : une combinaison linéaire nulle de ces 4 vecteurs est à coefficients tous nuls car :

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$ implique immédiatement $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Ce système de 4 vecteurs est donc libre dans un espace vectoriel de dimension 4 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. Pour calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$, il faut résoudre le

$$\begin{bmatrix}1\\\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\\\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\\\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\\\end{bmatrix}\qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \end{cases}$$

On en tire : $2x - 2y = -1$ (3$^{\text{e}}$ ligne - 1$^{\text{e}}$ ligne) et $2x + 2y = 0$ (4$^{\text{e}}$ ligne - 2$^{\text{e}}$ ligne), d'où $x = -\dfrac{1}{4}$ et $y = \dfrac{1}{4}$. On en déduit immédiatement, en reportant ces valeurs de x et y dans les 1$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$ lignes, que $z = 1$ et $t = \dfrac{3}{4}$, d'où : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dfrac{3}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. a/ Comme dans l'exercice précédent, calculons le rang du système $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$:
$rg\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = rg\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 3$, car ce dernier système est échelonné (même argument qu'à l'exercice précédent). Il en résulte que le système $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$, libre dans $\mathbb{R}^3$, en est une base. Pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans cette base, il faut déterminer α, β, γ, réels, tels que :
$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, soit : $\begin{cases} \alpha + 3\beta = -5 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = -1 \end{cases}$
On en tire immédiatement : $\beta = 3$, d'où $\alpha = -14$, et enfin $\gamma = 10$, soit $\overrightarrow{x} = -14\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 10\overrightarrow{c}$.
b/ Par linéarité, on a : $\varphi(\overrightarrow{x}) = -14\varphi(\overrightarrow{a}) + 3\varphi(\overrightarrow{b}) + 10\varphi(\overrightarrow{c}) = -14\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} + 10\overrightarrow{w}$, soit :
$\varphi(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = -11\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$. Et pour trouver les coordonnées α, β, γ de $\varphi(\overrightarrow{x})$ dans la base $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ de $\mathbb{R}^3$, il faut donc résoudre l'équation en (α, β, γ) : $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = -11\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$,
soit : $\begin{cases} \alpha + 3\beta = -11 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 7 \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \end{cases}$. On trouve $\beta = 3$, $\alpha = -20$, $\gamma = 21$, soit $\varphi(\overrightarrow{x}) = -20\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 21\overrightarrow{c}$.
c/ On vérifie sans peine que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\varphi(\overrightarrow{a}) - \varphi(\overrightarrow{b}) - \varphi(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$, i.e. $\varphi(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$, i.e. $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \in Ker\varphi$.
d/ Comme $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est l'image par φ de la base $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$, Im φ = Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ = Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ puisque $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. Or $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est libre, puisque si $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ (3$^{\text{e}}$ et 2$^{\text{e}}$ coordonnées de $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$). Donc $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de Im φ, et $rg\varphi = 2$. Et comme $\dim Ker\varphi = \dim E - rg\varphi = 3 - 2 = 1$, $Ker\varphi$ est de dimension 1 ; on en connaît un vecteur non nul : $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, d'après le c/ ; donc $\left\{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ est une base de $Ker\varphi$.

5. On sait que $E = \mathbb{R}_4[X]$ a pour base (canonique) $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ et que E est ainsi de dimension 5. Cherchons si les quatre polynômes X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ et $X(X-1)(X-2)(X-3)$ forment ou non une famille libre de vecteurs de E : soient donc α, β, γ et δ quatre scalaires réels tels que : $\alpha X + \beta X(X-1) + \gamma X(X-1)(X-2) + \delta X(X-1)(X-2)(X-3) = 0$. En faisant $X = 1$, on a $\alpha = 0$; en faisant $X = 2$, $2\alpha + 2\beta = 0$, d'où $\beta = 0$; en faisant $X = 3$, $3\alpha + 6\beta + 6\gamma = 0$, d'où $\gamma = 0$; enfin en faisant par exemple $X = 4$ et en tenant compte de $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on a $24\delta = 0$, d'où $\delta = 0$. Le système de vecteurs $\{X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$ est donc libre dans E et le sous-espace V =Vect $(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3))$ est donc de dimension 4. Tout polynôme constant $a_0 = a_0 \,.\, 1$ de E a pour image par φ le nombre a_0 dans $\mathbb{R}$; donc pour tout réel y de $\mathbb{R}$, on peut prendre pour antécédent de y par φ le polynôme constant $y = y \,.\, 1$ de E : donc l'application linéaire φ est bien surjective de E dans $\mathbb{R}$, et $rg\varphi = \dim$ Im $\varphi = \dim \mathbb{R} = 1$. D'où : $\dim Ker\varphi = \dim E - rg\varphi = 5 - 1 = 4$. Or V est inclus dans $Ker\varphi$, car pour tout polynôme $P = aX + bX(X-1) + cX(X-1)(X-2) + dX(X-1)(X-2)(X-3)$ de V, X est en facteur dans