UNIVERSITÉ PARIS VIII **ALGÈBRE LINÉAIRE I**
DEUG MIAS **2003-2004**

Examen partiel du 16 décembre 2003

1. (6 points) a/ Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}, \times)$ définie par $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ est un morphisme de groupes commutatifs.

b/ Quel est son noyau ? (i.e. quelle est la partie de $\mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R}/\varphi(x) = 1\}$?). Montrer que l'image de φ est l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

c/ Montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, le sous-groupe $(\varphi(a))$ de $(\mathbb{U}, \times)$ engendré par $\varphi(a)$ est fini si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.

2. (4 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et exprimer dans cette base le vecteur de coordonnées $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans la base canonique.

(Indication pour montrer que le système $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}$ est libre : déduire du système d'équations initial des équations obtenues par des sommes et des différences entre les lignes ; on pourra aussi, si l'on préfère, calculer le rang du système de vecteurs.)

3. (4 points) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (munis de leurs bases canoniques respectives) l'application définie par $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \ \ y + \ \ z \\ x + 2y + 3z \end{bmatrix}$. Montrer que φ est linéaire. Déterminer $Ker\varphi$, en donner une base et la dimension. En déduire que φ est surjective.

4. (4 points) a/ Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, les polynômes $P = X(X-1)$, $Q = X(X+1)$ et $R = (X-1)(X+1)$ forment une base de E. Exprimer les polynômes 1, X et X^2 dans cette base.

b/ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\varphi(1) = P$, $\varphi(X) = Q$, $\varphi(X^2) = R$. Montrer que φ est un isomorphisme et déterminer son isomorphisme inverse ψ (i.e. l'endomorphisme ψ tel que $\psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$) en calculant $\psi(1)$, $\psi(X)$, $\psi(X^2)$. (Utiliser l'expression de 1, X, X^2 trouvée au a/.)

5. (6 points) a/ Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\left\{1, \exp, \dfrac{1}{\exp}\right\}$ est libre (où $1 : x \mapsto 1$, $\exp : x \mapsto e^x$, $\dfrac{1}{\exp} : x \mapsto e^{-x}$).

b/ Montrer que, plus généralement, la famille $\left\{1, \exp, \dfrac{1}{\exp}, (\exp)^2, \dfrac{1}{(\exp)^2}, \ldots, (\exp)^n, \dfrac{1}{(\exp)^n}\right\}$ est, pour tout $n \geq 1$, libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Indication : par récurrence sur n : si la propriété est vraie jusqu'au rang n, considérer une relation de dépendance linéaire : $\alpha e^{(n+1)x} + \beta e^{-(n+1)x} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{k=n} \lambda_k e^{kx}$ et montrer que $\alpha = \beta = 0$ en : a/ multipliant les deux membres de cette égalité par $e^{-(n+1)x}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$; b/ multipliant les deux membres de cette égalité par $e^{(n+1)x}$ et en faisant tendre x vers $-\infty$. En déduire le résultat, en utilisant l'hypothèse de récurrence.)

UNIVERSITÉ PARIS VIII **ALGÈBRE LINÉAIRE I**
DEUG MIAS **2003-2004**

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 2003

1. a/ On a : $\varphi(0) = e^0 = 1$, $\varphi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix}.e^{2\pi iy}$ et $e^{2\pi i(-x)} = \left(e^{2\pi ix}\right)^{-1}$, donc φ est bien un morphisme entre les groupes commutatifs $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},\times)$.

b/ $Ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} / e^{2\pi ix} = 1\} = \mathbb{Z}$ (car l'argument de 1 est $0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). D'autre part, φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{U}$ et inversement tout nombre complexe de module 1 s'écrit $e^{i\theta}$, donc en posant $x = \dfrac{\theta}{2\pi}$, on voit que tout élément de $\mathbb{U}$ est l'image d'un x de $\mathbb{R}$ par φ, donc que $Im\,\varphi = \mathbb{U}$.

c/ $(\varphi(a)) = \{(\varphi(a))^n, n \in \mathbb{Z}\} = \{(\varphi(na)), n \in \mathbb{Z}\}$. Si $a \in \mathbb{Q}$, $a = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers, donc $\varphi(qa) = e^{2\pi iq} = 1$ et pour tout $n = pq + r$ (division de n par q, de reste $r < q$), $\varphi(na) = [\varphi(qa)]^p\,.\varphi(ra)$ sera l'un des $\varphi(ra)$, $0 \leq r < q$, en nombre fini. Inversement, si $(\varphi(a))$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$ de cardinal c, pour tout n, $\varphi(na)$ est l'un des $\varphi(n_1a), \ldots, \varphi(n_ca)$, donc il existe n et n_i distincts dans $\mathbb{Z}$ tels que $\varphi(na) = \varphi(n_ia)$, i.e. $\varphi((n-n_i)a) = 1$, donc un $q = n - n_i$ de $\mathbb{Z}^*$ tel que $qa \in \mathbb{Z}$, donc $a \in \mathbb{Q}$.

2. Soit une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}$: $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w} + \xi\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, i.e.
$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu + 4\xi &= 0 \quad (1) \\ 2\lambda + 3\mu + 4\nu + \ \xi &= 0 \quad (2) \\ 3\lambda + 4\mu + \ \nu + 2\xi &= 0 \quad (3) \\ 4\lambda + \ \mu + 2\nu + 3\xi &= 0 \quad (4) \end{cases}$$
. En calculant $(1)+(3)$ et $(2)+(4)$, $(1)-(3)$ et $(2)-(4)$, on a :

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu + 2\nu + 3\xi &= 0 \quad (1)+(3) \\ 3\lambda + 2\mu + 3\nu + 2\xi &= 0 \quad (2)+(4) \\ -\lambda - \ \mu + \ \nu + \ \xi &= 0 \quad (1)-(3) \\ -\lambda + \ \mu + \ \nu - \ \xi &= 0 \quad (2)-(4) \end{cases}$$
. De $(1)-(3)$ et $(2)-(4)$ on tire $\lambda + \mu = \nu + \xi$ et $\lambda - \mu = \nu - \xi$ soit $\lambda = \nu$, $\mu = \xi$ (en faisant la somme et la différence). En reportant ces valeurs dans $(1)+(3)$ et $(2)+(4)$, on obtient $4\lambda + 6\mu = 0$ et $6\lambda + 4\mu = 0$, d'où (par somme et différence) $\lambda = 0$, $\mu = 0$, donc $\nu = 0$, $\xi = 0$. Il en résulte que le système de quatre vecteurs $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, donc qu'il en constitue une base. En calculant la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}$ dans la base canonique, on obtient
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ donc } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\overrightarrow{u} + \frac{1}{10}\overrightarrow{v} + \frac{1}{10}\overrightarrow{w} + \frac{1}{10}\overrightarrow{x}.$$
N.B. : Autre façon de procéder pour démontrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}$ est un système libre : calculer son rang en utilisant un théorème du cours pour le transformer en un système échelonné :
$$rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -10 \\ -9 \end{bmatrix}\right) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 40 \end{bmatrix}\right)$$
$$= rg\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 - \frac{4}{6}.4 \end{bmatrix}\right) = 4,$$
puisque les coefficients λ, μ, ν, ξ d'une combinaison linéaire nulle d'un tel système seront (de proche en proche : $\lambda = 0$, puis $2\lambda - \mu = 0$, d'où $\mu = 0$, etc.) tous nuls.

3. On vérifie sans peine que $\varphi\left(\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \lambda'\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = \lambda\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + \lambda'\varphi\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$, donc que φ est bien linéaire. $Ker\varphi$ est l'ensemble des $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$, ce qu'on peut écrire : $z=-x-y$ et $x+2y-3x-3y=0$, soit $y=-2x$ et $z=x$. Donc $Ker\varphi$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, où x est quelconque, donc $Ker\varphi = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Une base de $Ker\varphi$ est donc constituée du seul vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $Ker\varphi$ est de dimension 1 (c'est une droite vectorielle). Comme $rg(\varphi) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker\varphi = 2$, φ est de rang maximum 2, donc est surjective.

4. a/ $\mathbb{R}_2[X]$, dont une base est constitué par les monômes $1, X$ et X^2, est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ (pour retrouver -ce qu'on ne demande pas de démontrer- que $\{1, X, X^2\}$ en est une base, remarquer que c'en est par définition un système générateur ; et que si $\alpha.1 + \beta.X + \gamma.X^2 = 0$, en faisant $X = 0$, on obtient $\alpha = 0$, et en faisant $X = 1$, puis $X = -1$, que $\beta + \gamma = 0$ et $-\beta + \gamma = 0$, d'où $\beta = \gamma = 0$, donc $\{1, X, X^2\}$ est aussi libre dans $\mathbb{R}_2[X]$). Donc pour démontrer que le système des trois vecteurs $\{P, Q, R\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (de dimension 3), il suffit de démontrer que ce système est libre. Or si $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$, i.e. si $\lambda X(X-1) + \mu X(X+1) + \nu(X-1)(X+1) = 0$, en faisant successivement $X = -1$, $X = 1$, et $X = 0$, on obtient que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Donc $\{P, Q, R\}$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Cherchons à exprimer 1, X et X^2 dans cette base : $1 = u_1.P + v_1.Q + w_1.R$, i.e. $1 = u_1X(X-1) + v_1X(X+1) + w_1(X-1)(X+1)$ donne, en faisant successivement $X = -1$, $X = 1$, et $X = 0$: $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et $w_1 = -1$, soit $1 = \dfrac{1}{2}.P + \dfrac{1}{2}.Q - 1.R$; on obtient de même : $X = -\dfrac{1}{2}.P + \dfrac{1}{2}.Q$ et $X^2 = \dfrac{1}{2}.P + \dfrac{1}{2}.Q$.

b/ La définition du texte donne clairement lieu à un et un seul endomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$, qui sera bijectif si et seulement s'il est injectif. Or il transforme le système libre $\{1, X, X^2\}$ en un autre système libre : $\{P, Q, R\}$, d'où l'injectivité (ou encore : φ sera bijectif si et seulement s'il est surjectif ; or $\dim Im\varphi = rg\varphi = rg\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\right) = rg(P, Q, R) = 3$, d'où la surjectivité). Donc φ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Son isomorphisme inverse ψ sera déterminé par son image sur les vecteurs de base 1, X et X^2 : or d'après le a/, $\psi(1) = \psi\left(\dfrac{1}{2}.P + \dfrac{1}{2}.Q - 1.R\right) =$
$\psi\left(\dfrac{1}{2}.\varphi(1) + \dfrac{1}{2}.\varphi(X) - 1.\varphi(X^2)\right)$
$= \dfrac{1}{2}.\psi\circ\varphi(1) + \dfrac{1}{2}.\psi\circ\varphi(X) - 1.\psi\circ\varphi(X^2) = \dfrac{1}{2}.1 + \dfrac{1}{2}.X - 1.X^2$, et, de même, $\psi(X) = -\dfrac{1}{2}.1 + \dfrac{1}{2}.X$ et $\psi(X^2) = \dfrac{1}{2}.1 + \dfrac{1}{2}.X$, soit : $\psi(1) = \dfrac{1}{2}(X+1) - X^2$, $\psi(X) = \dfrac{1}{2}(X-1)$, $\psi(X^2) = \dfrac{1}{2}(X+1)$.

5. a/ Une combinaison linéaire nulle de ces 3 applications s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^x + \nu e^{-x} = 0$. En faisant $x=0$, on a : $\lambda+\mu+\nu=0$; en faisant $x=1$, puis$x=-1$: $\lambda+\mu e+\dfrac{\nu}{e}=0$, puis $\lambda+\dfrac{\mu}{e}+\nu e=0$. D'où, par soustraction de la première égalité aux deux autres : $\begin{cases} \mu(e-1) + \nu\left(\dfrac{1}{e} - 1\right) & = & 0 \\ \mu\left(\dfrac{1}{e} - 1\right) + \nu(e-1) & = & 0 \end{cases}$, système linéaire dont le déterminant $(e-1)^2\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)$ est non nul, d'où $\mu = \nu = 0$, et donc $\lambda = 0$. Au lieu de ce calcul, on peut aussi utiliser l'indication du texte dans le b/ : dans l'égalité $\lambda + \mu e^x + \nu e^{-x} = 0$, multiplions par e^{-x} et faisons tendre x vers $+\infty$: on obtient $\mu = 0$; multiplions par e^x et faisons tendre x vers $-\infty$: on obtient $\nu = 0$; finalement, il ne reste que $\lambda = 0$. Il en résulte, quel que soit le procédé de calcul choisi, que la famille $\left\{1, \exp, \dfrac{1}{\exp}\right\}$ est bien libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b/ Par récurrence : la propriété est vraie pour $n = 1$ d'après le a/. En la supposant vraie jusqu'en n et en procédant comme indiqué pour le rang $n+1$, on obtient $\alpha = \beta = 0$, puis, comme $\displaystyle\sum_{k=-n}^{k=n} \lambda_k e^{kx} = 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence, que tous les λ_k sont nuls. La propriété est donc aussi vraie en $n+1$;

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left\{1,\ \exp,\ \dfrac{1}{\exp},\ (\exp)^2,\ \dfrac{1}{(\exp)^2}, \ldots, (\exp)^n,\ \dfrac{1}{(\exp)^n}\right\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.