UNIVERSITÉ PARIS VIII — **DEUG LIT**

Algèbre linéaire II — **1997-98**

Examen partiel du 24 avril 1998 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse, par exemple par la méthode du pivot.

2. (6 points [+ 3 points])
a/ Calculer le déterminant du système suivant, puis discuter suivant les valeurs de a l'existence de ses solutions, et le résoudre éventuellement :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

b/ Mêmes questions pour le système d'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & at & = & 1 \end{array} \right.$$

c/ (Question facultative, **+ 3 points**) Comment pourrait-on généraliser à l'ordre n ?

3. (4 points) Montrer que le déterminant d'ordre $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x & x & \dots & x & x \\ 1 & \omega & x & x & x & \dots & x & x \\ 1 & \omega & \omega^2 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \dots & x & x \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \dots & \omega^{n-1} & x \end{vmatrix}$$

où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, a pour valeur $x^n - 1$. 0n rappelle que les ω^k, $0 \leq k \leq n-1$, sont toutes les racines complexes n^{mes} de l'unité, racines du polynôme $X^n - 1$, donc telles que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$.

4. (7 points) Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini dans la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ par :
$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 4\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$. Quelle est la matrice A de φ dans la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$? On donne les vecteurs $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ et son inverse P^{-1}. En déduire la matrice A' de φ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$. Calculer A'^n pour $n \in \mathbb{N}$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A'^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire l'expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
Application : Soient les deux suites de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 = y_0 = 1$, liées par les relations de récurrence : $x_n = 4x_{n-1} - 2y_{n-1}$ et $y_n = -\dfrac{1}{2}x_{n-1} + 4y_{n-1}$. Donner l'expression de x_n et de y_n en fonction de n (on vérifiera par récurrence que $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$).

Corrigé de l'examen partiel du 24 avril 1998

1. On calcule le déterminant de A en retranchant la première colonne à chacune des autres :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Donc A est inversible. L'inversion de A par la méthode du pivot donne en 3 coups :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. a/ On calcule le déterminant du système en retranchant la première ligne aux autres, puis en mettant $a-1$ en facteur dans ces lignes (multilinéarité du déterminant) ; enfin on ajoute la somme des deux dernières colonnes à la première :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

– Pour $a = 1$, il ne reste qu'une seule équation : $x + y + z = 1$. C'est l'équation d'un plan affine dans $\mathbb{R}^3$, qu'on peut paramétrer ainsi : $\{x = u, y = v, z = 1-u-v, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$

– Pour $a = -2$, la somme des 3 équations donne $0 = 3$, absurde : il n'y a pas de solution.

– Enfin pour $a \neq 1,\ a \neq -2$, le système est de Cramer. Il y a une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2},\ z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

b/ On trouve de même à l'ordre 4 :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^3 \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3)$$

Comme dans le a/ :

- Pour $a = 1$, il ne reste qu'une seule équation : $x+y+z+t = 1$. C'est l'équation d'un hyperplan affine (de dimension 3) dans $\mathbb{R}^4$, qu'on peut paramétrer ainsi :
  $\{x = u, y = v, z = w, t = 1 - u - v - w, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}\}$
- Pour $a = -3$, la somme des 4 équations donne $0 = 4$, absurde : il n'y a pas de solution.
- Enfin pour $a \neq 1,\ a \neq -3$, le système est de Cramer. Il y a une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^3(a+3)} = \frac{1}{a+3},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^3(a+3)} = \frac{1}{a+3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^3(a+3)} = \frac{1}{a+3},\ t = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^3(a+3)} = \frac{1}{a+3}$$

c/ On généralise facilement à l'ordre n : Soit à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & ax_n & = & 1 \end{array} \right.$$

Il a pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$$

- Pour $a = 1$, il ne reste qu'une seule équation : $x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1$. C'est l'équation d'un hyperplan affine (de dimension $n-1$) dans $\mathbb{R}^n$, qu'on peut paramétrer ainsi :
  $\{x_1 = u_1, \ldots, x_{n-1} = u_{n-1}, x_n = 1 - u_1 - \ldots - u_{n-1},\ u_1 \in \mathbb{R}, \ldots,\ u_{n-1} \in \mathbb{R}\}$
- Pour $a = -n + 1$, la somme des n équations donne $0 = n$, absurde : il n'y a pas de solution.
- Enfin pour $a \neq 1,\ a \neq -n+1$, le système est de Cramer. Il y a une solution unique :

$$x_1 = \frac{1}{a+n-1}, \ldots, x_{n-1} = \frac{1}{a+n-1},\ x_n = \frac{1}{a+n-1}$$

3. En retranchant à chaque colonne, à partir de la deuxième, la colonne précédente, on obtient :

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & x & x & x & x & \dots & x & x \\
1 & \omega & x & x & x & \dots & x & x \\
1 & \omega & \omega^2 & x & x & \dots & x & x \\
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & x & \dots & x & x \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \dots & x & x \\
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \dots & \omega^{n-1} & x
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \omega-1 & x-\omega & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \omega-1 & \omega^2-\omega & x-\omega^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \omega-1 & \omega^2-\omega & \omega^3-\omega^2 & x-\omega^3 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & \omega-1 & \omega^2-\omega & \omega^3-\omega^2 & \omega^4-\omega^3 & \dots & x-\omega^{n-2} & 0 \\
1 & \omega-1 & \omega^2-\omega & \omega^3-\omega^2 & \omega^4-\omega^3 & \dots & \omega^{n-1}-\omega^{n-2} & x-\omega^{n-1}
\end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\dots(x-\omega^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega^k) = x^n - 1$$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1/2 & 4 \end{bmatrix}$ et $\det_{\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{bmatrix}$ et $A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1/2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

et $A'^n = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}$ et comme $A'^n = (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$,

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n/4 & 3^n/2 \\ 5^n/4 & -5^n/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n+5^n}{2} & 3^n-5^n \\ \dfrac{3^n-5^n}{4} & \dfrac{3^n+5^n}{2} \end{bmatrix}$$

Application :

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \text{ donc } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

et la formule est vraie pour $n=1$. L'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ s'écrit

$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ et permet de calculer : $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = AA^{n-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ (c.q.f.d.)

On en déduit que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n+5^n}{2} & 3^n-5^n \\ \dfrac{3^n-5^n}{4} & \dfrac{3^n+5^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ soit : } \begin{cases} x_n &= \dfrac{3^{n+1}-5^n}{2} \\ y_n &= \dfrac{3^{n+1}+5^n}{4} \end{cases}$$