Examen final (2^e session) du 16 septembre 1999

1. (4 points) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse, par exemple en résolvant un système linéaire.

2. (6 points) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$ (on rappelle que si $A = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} P^{-1}$, alors $e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} P^{-1}$).

3. (8 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ par : $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Donner valeurs propres et vecteurs propres de φ ; montrer que φ n'est pas diagonalisable.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur générateur de $Ker(A - 3I)$, et soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur générateur de $Ker(A - 2I)$. Montrer que si $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_3}$, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ et écrire cette matrice sous la forme $\Delta + N$, où Δ est une matrice diagonale et N une matrice telle que $N^2 = 0$. En écrivant que $A^n = P(\Delta + N)^n P^{-1}$ et en utilisant la formule du binôme, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. (6 points) a/ Soit D_n le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & x_{n-1} \\ 0 & t & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t & 0 & x_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t & x_1 \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & y \end{vmatrix}$

(où la matrice constituée des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes serait ainsi t fois la matrice identité d'ordre $n-1$).

Montrer par récurrence sur n que $D_n = t^{n-2}(ty - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i)$. (Pour obtenir une relation de récurrence entre D_{n+1} et D_n, on pourra développer D_{n+1} par rapport à la première colonne.)

b/ Application : calculer à l'aide du a/ le polynôme caractéristique et donner les valeurs propres de la matrice $A_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & n+1 \end{vmatrix}$

(où la matrice constituée des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes n'est autre que la matrice identité I_{n-1}, la dernière ligne -sauf son dernier terme- n'est constituée que de 1, et la dernière colonne -sauf son dernier terme- n'est constituée que de -1).

Quelle est la dimension de $Ker(A_n - I)$? A_n est-elle diagonalisable ?