UNIVERSITÉ PARIS VIII **Algèbre linéaire II**
DEUG LIT **1998-99**

Examen final du 22 juin 1999

1. (4 points) On donne le système linéaire suivant, où $a \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ a^2x + y + az = 1 \\ ax + a^2y + z = 1 \end{cases}$
Discuter suivant les valeurs de a l'existence des solutions, et le résoudre dans $\mathbb{C}$ quand c'est possible.

2. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,
défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de Aet en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$. (On rappelle que si $A' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$, alors $e^{tA'} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\nu t} \end{bmatrix}$,
et que si $A = PA'P^{-1}$, alors $e^{tA} = Pe^{tA'}P^{-1}$).

3. (4 points) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le polynôme minimal est $Q(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$. Déterminer les racines de Q. Montrer que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si $n = 3$, que peut-on dire de la dimension des sous-espaces propres de φ? Montrer que φ est pour tout n un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et exprimer son inverse φ^{-1} comme un polynôme en φ.

4. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,
défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 5\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}$.

Donner la matrice A de φ dans la base canonique et calculer le polynôme caractéristique de φ (vérifier que 3 est la seule valeur propre). Quels sont les vecteurs propres de φ? Montrer que φ n'est pas diagonalisable.

Calculer $A - 3I$ (I étant la matrice de l'identité) et $(A - 3I)^2$; quel théorème permet d'affirmer que $(A - 3I)^3 = 0$?

On se propose de déterminer $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$ tel que $\left\{\overrightarrow{w}, (\varphi - 3Id)(\overrightarrow{w}), (\varphi - 3Id)^2(\overrightarrow{w})\right\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$: montrer que cette condition équivaut à $a - b + c \neq 0$ (indication : calculer le déterminant dans la base canonique du système de vecteurs considéré).

On choisit alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_3}$ et on prend $\left\{\overrightarrow{\varepsilon_1} = (\varphi - 3Id)^2(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{\varepsilon_2} = (\varphi - 3Id)(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{\varepsilon_3} = \overrightarrow{e_3}\right\}$ pour nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de $\varphi - 3Id$ dans cette base et en déduire la matrice A' de φ dans cette même base.

Enfin, à l'aide de la formule du binôme : $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$ (valable dès que $ab = ba$), appliquée à $\left[(A' - 3I) + 3I\right]^n$, montrer que $A'^n = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comment pourrait-on en déduire le calcul de A^n ? (on ne demande pas ici de faire ce calcul).

(T. S. V. P.)

5. (4 points) On considère le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + x & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 & \ddots & & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sont n nombres réels ou complexes quelconques. Calculer D_1, D_2, D_3.

En développant D_n par rapport à la dernière ligne, montrer que $D_n = xD_{n-1} + a_n$. En déduire par récurrence que $D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Application : soit A_n la matrice à n lignes et n colonnes :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de A_n et en déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. (On rappelle que $x^{n+1} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$ et que les racines $n+1$ èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont $n+1$ nombres complexes distincts.)