UNIVERSITÉ PARIS VIII **Algèbre linéaire II**
DEUG LIT **1997-98**

Examen final (2e session) du 14 septembre 1998

1. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ par : $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 5\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$. Quelle est la matrice A de φ dans la base canonique ? Donner valeurs propres et vecteurs propres de φ ; calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

2. (6 points) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres ; en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donne le système d'équations de récurrence, avec $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -2x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

Montrer que $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et en déduire x_n et y_n en fonction de n.

3. (6 points) $\mathbb{R}^3$ étant muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à un vecteur $\overrightarrow{V} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} + Z\overrightarrow{e_3}$ associe $q(\overrightarrow{V}) = 2XY + 2YZ + 2ZX$.

a/ Vérifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice A dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

b/ Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire ses valeurs propres. Montrer que la matrice A est inversible.

c/ Montrer qu'il existe une base orthonormée $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ -qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement- telle que, si $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{\varepsilon_1} + y\overrightarrow{\varepsilon_2} + z\overrightarrow{\varepsilon_3}$, alors $q(\overrightarrow{V}) = 2x^2 - y^2 - z^2$ (noter les lettres minuscules désignant les coordonnées dans la nouvelle base, contre des majuscules pour les coordonnées dans la base canonique).

d/ Déterminer le polynôme minimal de A ; est-ce le même que son polynôme caractéristique ? En déduire l'expression de A^{-1} et de A^{-2} comme des polynômes du premier degré en A et écrire ces deux matrices $(3, 3)$ explicitement.

4. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ Calculer valeurs propres et vecteurs propres de A ; A est-elle diagonalisable ?
b/ Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorhisme $\varphi - Id$ est un s.-e.v. de dimension 1 dont on désigne une base par $\{\overrightarrow{v}\}$; déterminer un vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$; noter enfin $\overrightarrow{u}$ un vecteur propre de A non proportionnel à $\overrightarrow{v}$. Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice A' de φ dans cette base.
c/ Calculer $(A - I)^2$; en écrivant $A^n = (A - I + I)^n$ et en utilisant la formule du binôme : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (valable dès que $ab = ba$), calculer A^n.