UNIVERSITÉ PARIS VIII **Algèbre linéaire II**
DEUG LIT **1997-98**

Examen final du 3 juillet 1998

1. (6 points) Calculer le déterminant du système suivant, puis discuter suivant les valeurs de a l'existence de ses solutions, et le résoudre éventuellement :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & a^2y & + & z & = & a \\ x & + & ay & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

2. (8 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de φ, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
Montrer que φ n'est pas diagonalisable.
Déterminer une base $\{\overrightarrow{u}\}$ de $Ker(A + 2I)$ et une base $\{\overrightarrow{v}\}$ de $Ker(A - I)$.
Calculer $(A - I)^2$ et déterminer un vecteur $\overrightarrow{w}$ de $Ker(A - I)^2$, non proportionnel à $\overrightarrow{v}$, et tel que $\varphi(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.
Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$; donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ et calculer son inverse P^{-1} (p. ex. par la méthode du pivot).
Donner la matrice A' de φ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$. Montrer (p. ex. par récurrence sur n) que

$$A'^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et en déduire A^n en fonction de n.

3. (8 points) On se propose de déterminer si la matrice d'ordre n (où $n > 1$ et $a \in \mathbb{R}^*$) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & \dots & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & 0 \end{bmatrix}$$

(dont le terme général vaut a partout, sauf sur la diagonale, où il vaut 0) est ou non diagonalisable, et de calculer son inverse si elle existe.

a/ Calculer $det(A - \lambda I)$ en ajoutant chaque colonne, à partir de la 2^e^, à la 1^e^, puis en retranchant la 1^e^ ligne à chacune des autres.

b/ Calculer en particulier $det(A)$ et en déduire que A est inversible.

c/ Montrer que $Ker(A + aI)$ est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire), donc de dimension $n - 1$.

T.S.V.P.

d/ En déduire que $Ker(A-(n-1)aI)$ est de dimension 1 (vérifier que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ en est un générateur.)

e/ En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

f/ Quel est le polynôme minimal de A? (N.B. : le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable n'a que des racines simples...)

g/ En déduire A^{-1} comme polynôme du premier degré en A et montrer que

$$A^{-1} = \frac{1}{(n-1)a} \begin{bmatrix} -n+2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n+2 \end{bmatrix}$$

(matrice dont le terme général vaut 1 partout, sauf sur la diagonale, où il vaut $-n+2$).