UNIVERSITÉ PARIS VIII **ALGÈBRE LINÉAIRE I**
DEUG MIAS **2003-2004**

Examen final du 3 février 2004

1. (5 points) Dans $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, soit φ l'endomorphisme défini par $\varphi\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\varphi\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Donner la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Quel est est son rang ? Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$ (donner pour chacun de ces deux sous-espaces vectoriels une base et la dimension). On rappelle que pour deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$. Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ et en déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$.

2. (5 points) Quel est le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\left\{ \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$?

En déduire que la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ est inversible. Calculer son inverse et en déduire la solution du système linéaire $\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x - z + t = 2 \\ x + z - t = 3 \\ y - z - t = 4 \end{cases}$

Quelles sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}$ de $\mathbb{R}^4$ du vecteur $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} + 4\overrightarrow{l}$ (où $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l} \right\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$) ?

3. (6 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$, défini par : $\varphi\left(\overrightarrow{i}\right) = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\varphi\left(\overrightarrow{j}\right) = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (coordonnées dans la base canonique). Montrer que $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et son inverse P^{-1}. Calculer la matrice A' de φ dans $\mathcal{B}'$ et sa puissance n[e] A'^n. En déduire A^n.

Application : on donne les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 3v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n + 6w_n \end{cases}$ et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$. Montrer que si on pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$, alors $U_{n+1} = AU_n$ et en déduire que $U_n = A^n U_0$. Utiliser le calcul de A^n pour calculer les termes généraux de u_n, v_n et w_n.

. . . / . . .

4. (4 points) Soit la matrice carrée $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer N^2 et N^3. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$ (où I est la matrice de l'application identique). Calculer $\Gamma(t).\Gamma(-t)$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t)$ est une matrice inversible, c'est-à-dire un élément de $GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(s).\Gamma(t) = \Gamma(s+t)$ et que $\Gamma : t \mapsto \Gamma(t)$ est un morphisme de groupes injectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$.

5. (5 points) Soit $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes, muni de la base canonique $\mathcal{B} = \left\{ K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (ainsi toute matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de E s'écrit de manière unique $A = aK + bL + cM + dN$). Soit $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et soit $\varphi(A) = H^{-1}AH$.

Montrer que φ est un isomorphisme de E (indication : montrer que φ est linéaire et que si $A' = H^{-1}AH$, alors $A = HA'H^{-1}$). Calculer explicitement $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ et $\varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ et donner les matrices de φ et de φ^{-1} dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E (NB : E étant de dimension 4, ce sont des matrices à 4 lignes et 4 colonnes).

UNIVERSITÉ PARIS VIII **ALGÈBRE LINÉAIRE I**
DEUG MIAS **2003-2004**

Corrigé de l'examen final du 3 février 2004

1. $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&2\\1&3&1\end{bmatrix}$, et $rgA=rg\begin{bmatrix}1&1-1&3-3\\1&2-1&2-3\\1&3-1&1-3\end{bmatrix}=rg\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&2&-2\end{bmatrix}=rg\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&0\end{bmatrix}=2.$

Donc $\mathrm{Im}\varphi$ est de dimension 2 et $\mathrm{Ker}\varphi$ de dimension $3-2=1$. Des équations de $\mathrm{Ker}\varphi$ sont : $\left\{\begin{array}{rcll}x+\ \ y+3z&=&0&(1)\\x+2y+2z&=&0&(2)\\x+3y+\ \ z&=&0&(3)\end{array}\right.$, d'où $((2)-(1))$: $y-z=0$ et $x=-4y$, soit $\mathrm{Ker}\varphi=\mathbb{R}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\mathrm{Im}\varphi$ est engendré (par exemple) par les 2 premiers vecteurs-colonnes de A, soit : $\mathrm{Im}\varphi=\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Montrons que $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$: soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+\ \ \mu\\\lambda+2\mu\\\lambda+3\mu\end{bmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathrm{Im}\varphi$: il est dans $\mathrm{Ker}\varphi$ ssi $x+y+3z=0$ et $x+2y+2z=0$ (équations de $\mathrm{Ker}\varphi$, la 3e étant une combinaison linéaire des 2 premières), soit : $5\lambda+12\mu=0$ et $5\lambda+10\mu=0$, d'où $\lambda=\mu=0$, i.e. $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Donc, puisque $\dim(\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Im}\varphi)=\dim\mathrm{Ker}\varphi+\dim\mathrm{Im}\varphi=3$, avec $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, on a bien $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Im}\varphi$.

2. $rg\,(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x})=rg\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&1\\0&1&1&-1\\1&0&-2&-2\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&2&0\\1&0&-2&-2\end{pmatrix}=4.$

Donc la matrice $P=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&-1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}$ est inversible. Calculons son inverse en résolvant le système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} &y&+z&+t&=&1&;&0&;&0&;&0&(1)\\x&&-z&+t&=&0&;&1&;&0&;&0&(2)\\x&&-z&+t&=&0&;&0&;&1&;&0&(3)\\&y&-z&-t&=&0&;&0&;&0&;&1&(4)\end{array}\right.$

De $(2)+(3)$ on tire : $x=0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0$ et de $(1)+(4)$: $y=\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}$ d'où dans (1) et (4) : $z+t=\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{1}{2}$ et $z-t=0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0$, soit $z=\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}$ et $t=\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}$

soit enfin : $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$. La solution du système linéaire $P\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ est donc $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\5\\-1\\-2\end{bmatrix}$. Puisque les coordonnées d'un vecteur dans la nouvelle base (ici $\mathcal{B}$) sont obtenues à partir de celles dans l'ancienne base par multiplication à gauche par P^{-1} (P est étant la matrice de changement de base), les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}+4\overrightarrow{l}$ sont les x,y,z,t trouvés en rśolvant ce système linéaire, i.e. $\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1$

3. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Le rang du système de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ -1 & 1 & 0+1 \\ 0 & -1 & 1-0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$, donc $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculons son inverse P^{-1} en résolvant le système linéaire : $\begin{cases} x & & +z & = & 1 & ; & 0 & ; & 0 & (1) \\ -x & +y & & = & 0 & ; & 1 & ; & 0 & (2) \\ & -y & +z & = & 0 & ; & 0 & ; & 1 & (3) \end{cases}$.

De $(1)+(2)$ et (3), on tire : $y + z = 1\ ;\ 1\ ;\ 0$ et $-y + z = 0\ ;\ 0\ ;\ 1$ d'où

$y = \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}$ et enfin $x = \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}$, soit $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, d'où la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$: $A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, soit

$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (matrice diagonale), d'où $A'^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{bmatrix}$.

On en déduit que $A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\times 8^n + 2^n & 4\times 8^n - 2^n & 2^n - 2\times 4^n \\ 2\times 4^n - 2^n & 2^n + 4^n & 2^n - 2\times 4^n \\ 4\times 8^n - 2\times 4^n & 4\times 8^n - 2\times 4^n & 4\times 8^n + 2\times 4^n \end{bmatrix}$

Application : $U_{n+1} = AU_n$ s'écrit aussi :

$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = U_n = A^nU_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\times 8^n + 2^n & 4\times 8^n - 2^n & 2^n - 2\times 4^n \\ 2\times 4^n - 2^n & 2^n + 4^n & 2^n - 2\times 4^n \\ 4\times 8^n - 2\times 4^n & 4\times 8^n - 2\times 4^n & 4\times 8^n + 2\times 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, soit :

$u_n = 8^{n+1} - 2\times 4^n + 2^n$, $v_n = 4^n$, $w_n = 8^{n+1} - 2\times 4^n$

4. $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (et donc, $\forall n \geq 3,\ N^n = 0$). Un calcul simple montre que

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t).\Gamma(-t) = (I+tN+\frac{t^2}{2}N^2).(I-tN+\frac{t^2}{2}N^2) = I$, i.e. $\Gamma(t)$ est inversible et $[\Gamma(t)]^{-1} = \Gamma(-t)$. (NB : comme $\forall n \geq 3$, $N^n = 0$, $\Gamma(t)$ n'est autre que $\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} N^n$). On obtient de même que $\Gamma(s).\Gamma(t) = I + (t+s)N + \frac{(t+s)^2}{2}N^2 = \Gamma(s+t)$, donc $t \mapsto \Gamma(t)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(GL_3(\mathbb{R}),\times)$. Enfin l'injectivité s'obtient en identifiant : si $t \in \mathrm{Ker}\varphi$, $\Gamma(t) = I$, i.e. $\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, et donc $t = 0$: φ est bien un morphisme de groupes injectif.

5. φ est clairement linéaire, i.e. c'est un endomorphisme de E, bijectif car l'équation en A : $\varphi(A) = A'$, où A' est quelconque dans E a, comme le montre l'indication du texte, pour solution unique $HA'H^{-1}$, donc φ est un isomorphisme de E (N.B. : comme $A' \mapsto HA'H^{-1}$ est linéaire comme φ, ceci montre aussi que $A' \mapsto HA'H^{-1}$ est la bijection réciproque (=l'isomorphisme inverse) de φ). On a :

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b+c+d & -a+b-c+d \\ -a-b+c+d & a-b-c+d \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-b-c+d & a+b-c-d \\ a-b+c-d & a+b+c+d \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de φ et celle de φ^{-1}, on calcule les images par φ et φ^{-1} des vecteurs de base :

$$\varphi(K) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \varphi(L) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \varphi(M) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \varphi(N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(K) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \varphi^{-1}(L) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \varphi^{-1}(M) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \varphi^{-1}(N) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = \{K, L, M, N\}$: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

et celle de φ^{-1} dans la même base : $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$